МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
Р47

Р47 **Решение** уравнений и неравенств : методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / авторы-составители А. И. Галочкин, Д. А. Калинин. — М. : изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 16 с. : ил.

В разработке даны методические указания по решению рациональных уравнений и неравенств при помощи метода интервалов и замены переменной. Приведены задачи для самостоятельного решения по этим темам и несколько задач повышенной сложности по теме «Модули».

ББК 22.1



Решение уравнений и неравенств.

Авторы-составители А. И. Галочкин, Д. А. Калинин.

Редактор А. В. Деревянкин. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

## Введение

Чаще всего с уравнениями и неравенствами стараются совершать такие преобразования, которые не изменяют множества их решений.

Определение. Два уравнения (неравенства) называются равносильными, если множества их решений совпадают. Равносильность уравнений (неравенств) обозначается знаком «$\Leftrightarrow$».

Пример: $x(x+2)=x+6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$.

Если каждое решение первого уравнения или неравенства является решением второго (но не обязательно все решения второго уравнения или неравенства являются решениями первого), то второе уравнение или неравенство называется следствием первого. Это обозначают так: (1) $\Rightarrow$ (2).

Пример: $x+2=6 \Rightarrow (x+2)^2=6^2$.

## § 1. Рациональные неравенства

Простейшими рациональными неравенствами являются

- линейные (вида $ax+b>0$, где $a\neq0$),
- квадратные (вида $ax^2+bx+c>0$, где $a\neq0$),

где знак «$>$» может быть заменен на «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$».

Решение линейных неравенств элементарно и не должно вызывать никаких сложностей. Единственный тонкий момент, который иногда упускают из виду, состоит в том, что при делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется, например: $-5x<10 \Leftrightarrow x>-2$.

Рассмотрим решение квадратных неравенств.

**1.** Решите неравенства:

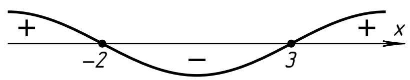
а) $x^2-x+2>0$; в) $x^2\leqslant9$; д) $x^2-4x+4\leqslant0$;
б) $x^2-x-6<0$; г) $2x^2-3\geqslant x$; е) $x^2-3x+3<0$.

Решение **1**а. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2-x+2$ равен $D=1^2-4\cdot2=-7<0$, поэтому при всех значениях $x$ знак этого трехчлена совпадает со знаком его коэффициента при $x^2$. Следовательно, $x^2-x+2>0$ при всех значениях $x$.

О т в е т: $x\in(-\infty; +\infty)$.

Р е ш е н и е **1**б. Дискриминант квадратного трехчлена $x^2-x-6$ больше нуля, находим его корни: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=3$ или $x=-2$. Таким образом, неравенство можно преобразовать к виду $(x-3)(x+2)<0$.

Нанесем на числовую ось корни квадратного трехчлена. В результате числовая ось разобьется на три промежутка: $(-\infty; -2)$, $[-2; 3]$, $(3; +\infty)$. На промежутке $(-\infty; -2)$ обе скобки $(x-3)$ и $(x+2)$ положительны, следовательно, $x^2-x-6>0$. При переходе на промежуток $[-2; 3]$ меняет знак только скобка $(x+2)$, значит, произведение $(x-3)(x+2)$ тоже меняет знак. При переходе на промежуток $(3; +\infty)$ меняет знак лишь скобка $(x-3)$ и, следовательно, произведение $(x-3)(x+2)$ еще раз изменит знак. В результате получилось, что функция $y=(x-3)(x+2)$ имеет следующие знаки:




Заметим, что точки $x=-2$ и $x=3$ в множество решений неравенства не входят, поскольку в этих точках $(x-3)(x+2)=0$.

О т в е т: $x\in(-2; 3)$.

Конечно, решить этот пример можно и быстрее, если заметить, что график квадратного трехчлена пересекает ось $x$ в точках $-2$ и 3, между этими точками он находится ниже оси $x$, а вне отрезка $[-2; 3]$ — выше оси $x$. Поэтому $x^2-x-6<0$ при $x\in(-2; 3)$. Однако разобранный ранее способ оказывается полезным при решении более сложных примеров. Этот способ называется *методом интервалов*.

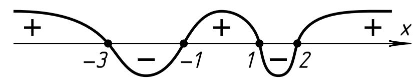
**2.** Решите неравенства:

а) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+3)}\geqslant 0$; в) $\dfrac{(x+1)^2(x-4)}{(x+2)(x^2+x+1)}\geqslant 0$; д) $x<\dfrac{1}{x}$; е) $\dfrac{x^2}{x+2}\leqslant 1$;

б) $x^2(3-x)\leqslant 0$; г) $\dfrac{(x^2-x-2)(x+1)}{(2x-3)(1-2x)^3}\leqslant 0$; ж) $\dfrac{1}{x^2}\geqslant\dfrac{1}{3x+2}$.

Р е ш е н и е **2**а. Решим неравенство методом интервалов. Для этого нанесем на числовую ось те значения $x$, при которых обращается в нуль числитель или знаменатель дроби: $x=-3$, $x=-1$, $x=1$ и $x=2$.

При $x>2$ все скобки $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+1)$ и $(x+3)$ положительны, поэтому дробь больше нуля. При движении справа налево при переходе через каждую из точек 2, 1, $-1$ и $-3$ ровно один сомножитель меняет знак, поэтому знак всей дроби изменяется. Таким образом, дробь имеет следующие знаки:




При $x=1$ и $x=2$ дробь обращается в нуль. Неравенство в задаче нестрогое, поэтому эти числа следует включить в ответ. При $x=-1$ и $x=-3$ дробь не определена.

О т в е т: $x\in(-\infty; -3)\cup(-1; 1]\cup[2; +\infty)$.

Таким способом можно решать рациональные неравенства вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\leqslant 0,\quad \frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0,\quad \frac{P(x)}{Q(x)}<0,\quad \frac{P(x)}{Q(x)}>0,$$

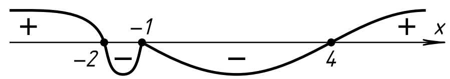
где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, которые удается разложить на линейные и неприводимые квадратные множители, причем все корни числителя и знаменателя различны.

Немного сложнее решаются рациональные неравенства в случае, когда некоторые из множителей присутствуют в степенях, больших 1.

Р е ш е н и е **2**в. Поскольку $x^2+x+1>0$ при всех значениях $x$ (дискриминант этого квадратного трехчлена меньше нуля), то

$$\frac{(x+1)^2(x-4)}{(x+2)(x^2+x+1)}\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2(x-4)}{x+2}\geqslant 0.$$

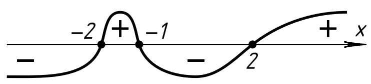
Нанесем на числовую прямую те значения $x$, при которых числитель или знаменатель полученной дроби обращаются в нуль. При $x>4$ дробь положительна. При переходе через точки $x=4$ и $x=-2$ сомножители $(x-4)$ и $(x+2)$ соответственно изменяют знак, а поэтому изменяет знак вся дробь. При переходе через точку $x=-1$ сомножитель $(x+1)^2$ не меняет знака, поэтому и дробь в этом случае не изменяет знака. В результате получаем, что знаки дроби распределяются следующим образом:




Значения $x=-1$ и $x=4$ являются решениями, так как в этих точках дробь обращается в нуль. При $x=-2$ дробь не определена.

О т в е т: $x\in(-\infty; -2)\cup\{-1\}\cup[4; +\infty)$.

Р е ш е н и е **2**е. $\dfrac{x^2}{x+2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+2} \leqslant 0.$
Это неравенство решаем методом интервалов, аналогично задаче **2**а. Дробь из последнего неравенства имеет следующие знаки:




Значения $x=-1$ и $x=2$, в которых дробь обращается в нуль, являются решениями.

О т в е т: $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 2]$.

**3.** Решите системы:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} < 1, \\ x^2+x \leqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3x-4 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{5x^2-2x-3} \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ 9x^2 > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-2x-1=0, \\ x^3-4x-2>0. \end{cases}$

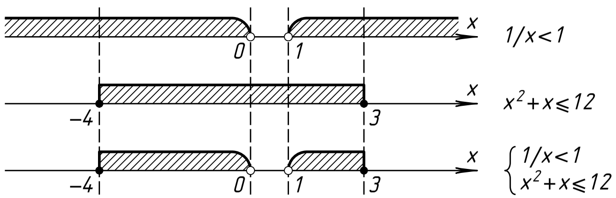
З а м е ч а н и е. При решении системы, состоящей как из уравнений, так и из неравенств, часто оказывается удобным сначала решить уравнения, а затем подставить полученные решения в неравенства. Однако иногда более рациональными оказываются другие методы. Например, при решении задачи **3**в удобно воспользоваться равенством $x^3-4x-2=(x+2)(x^2-2x-1)+x$.

Р е ш е н и е **3**а. Решим каждое из неравенств методом интервалов:

1) $\dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;

2) $x^2+x \leqslant 12 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 3]$.

Решение системы можно найти следующим способом. Располагаем друг под другом две числовых оси. На первой отмечаем множество, являющееся решением первого неравенства, на второй — второго. Точки, которые отмечены и на той, и на другой числовой оси, являются решением системы. Их отмечаем на третьей числовой оси.




О т в е т: $x \in [-4; 0) \cup (1; 3]$.

З а м е ч а н и е. Решением системы неравенств является пересечение множеств решений отдельных неравенств, входящих в систему.



При решении некоторых примеров иногда возникает задача составить объединение решений нескольких неравенств. Это записывают в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{array}\right.$$

П р и м е р. Неравенство $\dfrac{1}{x} < 1$ можно решать также следующим способом:

$$\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ 1<x; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 1>x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

**4.** Решите относительно $x$ следующие уравнения и неравенства с параметром: а) $x^2=a$; б) $x+a=a^2x+1$; в) $ax<1$; г) $x^2-2x+a \leqslant 0$; д) $x^2+2ax+4<0$; е) $ax^2+2x+1>0$.

З а м е ч а н и е. Задачи с параметрами обычно решаются такими же методами, что и подобные задачи без параметров. Однако решение часто приходится разбивать на различные случаи в зависимости от значения параметра. Эти разбиения естественным образом возникают в ходе решения.

Р е ш е н и е **4**г. Находим дискриминант квадратного трехчлена $x^2-2x+a$, равный $4-4a$. Дальнейшее решение естественно разбить на три случая в зависимости от знака дискриминанта.

1) $D=4-4a<0 \Leftrightarrow a>1$. В этом случае квадратный трехчлен при всех значениях принимает положительные значения, а значит, данное неравенство не имеет решений.

2) $D=4-4a=0 \Leftrightarrow a=1$. В этом случае имеем: $x^2-2x+1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x=1$.

3) $D=4-4a>0 \Leftrightarrow a<1$. Тогда решениями неравенства будут значения $x$, расположенные между корнями квадратного трехчлена, т. е. $1-\sqrt{1-a} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{1-a}$.

О т в е т: решений нет при $a>1$;
$x=1$ при $a=1$;
$x \in [1-\sqrt{1-a}; 1+\sqrt{1-a}]$ при $a<1$.

**5.** Найдите все значения $\alpha$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x+\alpha \leqslant 0, \\ x^2-4x-6\alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

## § 2. Уравнения и неравенства с модулями

Основные методы решения задач с модулями были подробно разобраны в брошюре «Модули», высылавшейся вам в девятом классе. Здесь же мы предложим вашему вниманию несколько задач повышенной сложности по этой теме. Если они вызовут затруднения, то рекомендуем повторить материал брошюры «Модули».

### Упражнения

**6.** Решите уравнение с параметром: $|x|-|x-2|=a$. Изобразите на координатной плоскости каждый из возникающих случаев.

Указание. На координатной плоскости решение этого уравнения изображается в виде пересечения графика функции $y=|x|-|x-2|$ и прямой $y=a$. Как построить график функции $y=|x|-|x-2|$?

**7.** Определите, при каких значениях параметра $a$ все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant 4$.

Указание. Проще всего сначала решить это уравнение с параметром и посмотреть, каким будет множество его решений при различных $a$. Подумайте, входят ли в ответ те значения $a$, при которых уравнение вообще не имеет решений.

**8.** Решите уравнение $|a^3+a^2x|+|a^2x+1|=1-a^3$.

Указание. Заметьте, что $(a^2x+1)-(a^3+a^2x)=1-a^3$.

## § 3. Замена переменной

Часто при решении уравнений или неравенств оказывается удобно сделать замену и перейти к новой переменной, относительно которой уравнение или неравенство будет иметь более простой вид. Во многих задачах правильно подобранная замена может существенно упростить решение.

Решение уравнения или неравенства с помощью замены переменной осуществляется следующим образом. Предположим, имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — некоторая функция (все сказанное ниже относится также и к неравенствам). Сделав замену $\varphi(x)=y$, получим новое уравнение, уже относительно переменной $y$:

$$g(y)=0.$$

Замену следует по возможности подбирать таким образом, чтобы полученное уравнение относительно $y$ достаточно легко решалось. Предположим, нам это удалось, и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — корни уравнения $g(y)=0$. Теперь, возвращаясь к переменной $x$, решаем уравнения $\varphi(x)=y_1$,



$\varphi(x)=y_2, \ \ldots, \ \varphi(x)=y_n$. Множество решений исходного уравнения состоит из решений всех этих уравнений. Аналогичным образом действуют, если множество решений уравнения $g(y)=0$ является бесконечным. Отметим, что если уравнение $g(y)=0$ не имеет решений, то и исходное уравнение также не имеет их.

Поясним суть метода замены переменной на примере.

**9.** Решите уравнение $x^4-10x^2+9=0$.

Решение. Сделаем замену $y=x^2$. Тогда $y^2-10y+9=0 \Leftrightarrow y=1$ или $y=9$. Возвращаясь к переменной $x$, решаем два уравнения: 1) $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$; 2) $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm3$.

Ответ: $\pm1$; $\pm3$.

Универсального алгоритма, позволяющего решить любое уравнение или неравенство при помощи замены переменной, не существует. Иной раз очень непросто увидеть правильную замену, которая приведет задачу к простому и удобному для решения виду. Часто для этого требуется выполнить сначала некоторые преобразования (например, группировку слагаемых); в некоторых задачах приходится делать замену не один раз. Тем не менее, существует несколько стандартных замен, которые употребляются достаточно часто. Приведем основные такие замены.

- $y=x^n$. В частности, с помощью замены $y=x^2$ решаются так называемые *биквадратные уравнения*, т. е. уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq0$ (см. задачу **9**).
- $y=P(x)$ или $y=\sqrt[k]{P(x)}$, где $P(x)$ — некоторый многочлен. Чаще всего встречаются задачи, в которых делается замена $y=ax^2+bc+c$ или $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.
- $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены. Одна из часто встречающихся замен: $y=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$.

**10.** Решите уравнение $x^4-3x^3-26x^2-3x+1=0$.

Решение. Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения, то разделим обе части на $x^2$:

$$x^2-3x-26-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \ \Leftrightarrow \ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-26=0.$$

Заметим, что $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$. Тогда, сделав замену $y=x+\dfrac{1}{x}$, получим:

$$(y^2-2)-3y-26=0 \ \Leftrightarrow \ y^2-3y-28=0 \ \Leftrightarrow \ y=-4 \text{ или } y=7.$$

Вернемся к переменной $x$:

$$\left[\begin{aligned} &x+\frac{1}{x}=-4,\\ &x+\frac{1}{x}=7\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &x^2+4x+1=0,\\ &x^2-7x+1=0;\end{aligned}\right.\\ &x\neq 0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=-2\pm\sqrt{3},\\ &x=\frac{7\pm\sqrt{45}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $-2\pm\sqrt{3}$, $\frac{7\pm\sqrt{45}}{2}$.

Замечание 1. Уравнения вида $ac^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, где $a\neq 0$, называются *возвратными*. Иногда встречается также название *симметрические уравнения*.

Замечание 2. Перед тем, как делить обе части уравнения на $x^2$, мы проверили, что $x=0$ не является корнем уравнения. Это необходимо делать, чтобы избежать потери корней: так, например, разделив обе части уравнения $(x^2-4x)^2=9x^2$ на $x^2$ и получив уравнение $(x-4)^2=9$, мы потеряем корень $x=0$.

Замечание 3. При решении уравнений $x+\frac{1}{x}=-4$ и $x+\frac{1}{x}=7$ мы домножаем обе их части на $x$. Здесь, наоборот, могут появиться посторонние корни $\Big($сравните уравнения $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4+\frac{1}{x^2}$ и $(x^2-1)^2=4x^2+1\Big)$, поэтому необходимо добавить ограничение $x\neq 0$. Без него переход не будет равносильным.

Рассмотрим другие типы уравнений, решаемые при помощи стандартных замен.

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ сводятся к биквадратным с помощью замены $y=\frac{(x+a)+(x+b)}{2}$.

**11.** Решите уравнение $(x-1)^4+(x+3)^4=82$.

Решение. Сделаем замену $y=\frac{(x-1)+(x+3)}{2}=x+1$. При этом $x=y-1$, $(x-1)^4+(x+3)^4=(y-1-1)^4+(y-1+3)^4=(y-2)^4+(y+2)^4$. После раскрытия скобок по формуле $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ левая часть уравнения принимает вид $2y^4+48y^2+32$. Получаем биквадратное уравнение $2y^4+48y^2+32=82$. Делаем замену $z=y^2$, тогда

$$2z^2+48z-50=0 \Leftrightarrow z^2+24z-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &z=1,\\ &z=-25,\end{aligned}\right.$$

$$\text{т. е.} \quad \left[\begin{aligned} &y^2=1,\\ &y^2=-25\end{aligned}\right. \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1,$$

откуда $x=0$ или $x=-2$.

Ответ: $-2$; $0$.



Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$, где $a<b<c<d$ и $b-a=d-c$, заменой $y=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4}$ также сводятся к биквадратным. Можно решить такое уравнение и иначе, перемножив первую скобку с последней, а вторую — с третьей и введя соответствующую замену.

**12.** Решите уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

Решение. Группируя в левой части первый множитель с последним, а второй — с третьим, получим уравнение $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$. Обозначив $y=x^2+5x+5$, получим: $(y-1)(y+1)=120 \Leftrightarrow y^2=121 \Leftrightarrow y=\pm 11$. Решим получившиеся уравнения относительно $x$: 1) $x^2+5x+5=11 \Leftrightarrow x=1$ или $x=-6$; 2) $x^2+5x+5=-11 \Leftrightarrow x^2+5x+16=0$, $D=5^2-4\cdot 16<0$, и, следовательно, уравнение корней не имеет.

Ответ: $-6$; $1$.

При помощи замены $y=ax+c/x$ решают и некоторые другие уравнения. Рассмотрим уравнение вида $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2$. Если $c=0$, то решение уравнения не представляет особого труда. Если $c\neq 0$, то $x=0$ не является корнем уравнения, поэтому разделим обе части уравнения на $x^2$ и получим равносильное уравнение

$$\left(ax+\frac{c}{x}+b_1\right)\left(ax+\frac{c}{x}+b_2\right)=A,$$

которое заменой $y=ax+c/x$ сводится к квадратному уравнению.

Замечание. К уравнениям такого вида сводятся и уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2$, где $ab=cd$, после перемножения первой скобки со второй, а третьей — с четвертой.

Рассмотрим далее уравнение вида $p(ax^2+b_1x+c)^2+q(ax^2+b_2x+c)^2=Ax^2$. Если $c=0$ или $p+q=0$, то решение уравнения не представляет особого труда. Иначе $x=0$ не является корнем уравнения, поэтому разделим обе части уравнения на $x^2$ и получим равносильное уравнение

$$p\left(ax+\frac{c}{x}+b_1\right)+q\left(ax+\frac{c}{x}+b_2\right)^2=A,$$

которое заменой $y=ax+c/x$ сводится к квадратному уравнению.

Замечание. К уравнениям такого вида сводятся и уравнения вида $(x-a)^2(x-b)^2+(x-c)^2(x-d)^2=Ax^2$, где $ab=cd$, после перемножения первой скобки со второй, а третьей — с четвертой.

Рассмотрим теперь решение уравнений вида

$$\frac{a_1}{x+b_1}+\frac{a_2}{x+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{x+b_n}=A.$$

Уравнение такого вида при некоторых условиях на числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $A$ может быть решено следующим образом. Группируя члены уравнения по два и суммируя каждую пару, надо получить в числителях многочлены первой или нулевой степени, отличающиеся друг от друга только числовыми множителями, а в знаменателях — квадратные трехчлены с одинаковыми двумя членами, содержащими $x$. Тогда после замены переменной полученное уравнение будет либо иметь такой же вид, но с меньшим числом слагаемых, либо будет равносильно совокупности двух уравнений, одно из которых будет первой степени, а второе будет уравнением данного вида, но с меньшим числом слагаемых. Рассмотрим пример.

**13.** Решите уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0.$

Р е ш е н и е. Сгруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0.$$

Преобразуем выражения в скобках:

$$\frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0.$$

Так как $x=-2$ не является корнем уравнения, мы можем разделить обе части на $2(x+2)$. Получим уравнение

$$\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2(x^2+4x+4)}=0.$$

После замены $u=x^2+4x+4=(x+2)^2$ уравнение примет вид

$$\frac{1}{u-4}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{2u}=0.$$

Далее решение не представляет сложности:

$$\frac{5u^2-15u+4}{2u(u-1)(u-4)}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 5u^2-15u+4=0, \\ u\neq 0,\;\; u-1\neq 0,\;\; u-4\neq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; u=\frac{15\pm\sqrt{145}}{10}.$$

Отметим, что $\frac{15-\sqrt{145}}{10}>0$. Тогда $(x+2)^2=\frac{15\pm\sqrt{145}}{10} \;\Leftrightarrow\; x=$ $=-2\pm\sqrt{\frac{15\pm\sqrt{145}}{10}}$.

О т в е т: $x=-2\pm\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}$.



З а м е ч а н и е. Уравнения вида

$$\frac{c_1x+d_1}{p_1x^2+q_1x+r_1}+\frac{c_2x+d_2}{p_2x^2+q_2x+r_2}+\ldots+\frac{c_mx+d_m}{p_mx^2+q_mx+r_m}=B$$

приводятся к виду $\frac{a_1}{x+b_1}+\frac{a_2}{x+b_2}+\ldots+\frac{a_n}{x+b_n}=A$, если каждое слагаемое разложить в сумму простейших дробей: $\frac{c_kx+d_k}{p_kx^2+q_kx+r_k}=\frac{e}{x+g}+\frac{f}{x+h}$.

**14.** Решите уравнение $\frac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{10}{9}.$

Р е ш е н и е. Можно освободиться от знаменателя и свести уравнение к уравнению четвертой степени, которое окажется возвратным. Но замену $y=x+\frac{1}{x}$ можно провести и раньше, сократив решение. Для этого поделим числитель и знаменатель дроби на $x^2$ (это можно сделать, поскольку $x=0$ не является решением уравнения). Получим:

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{10}{9};\text{ тогда } \frac{y}{(y-1)^2}=\frac{10}{9} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 10y^2-29y+10=0, \\ y\neq 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} y=5/2, \\ y=2/5. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной $x$, получаем два уравнения:

1) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x^2-5x+2=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0{,}5; \end{array}\right.$

2) $x+\frac{1}{x}=\frac{2}{5} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 5x^2-2x+5=0, \\ x\neq 0. \end{cases}$

Уравнение $5x^2-2x+5=0$ корней не имеет, поскольку $D=2^2-$ $-4\cdot 5\cdot 5<0$.

О т в е т: 0,5; 2.

**15.** Решите уравнение $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}.$

Р е ш е н и е. В левой части уравнения стоит сумма двух квадратов. Попытаемся дополнить ее до квадрата разности. Получаем:

$$x^2-\frac{2x^2}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1} \;\Leftrightarrow\; \left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=\frac{40}{9}-\frac{2x^2}{x+1}.$$

Введем переменную $y=\frac{x^2}{x+1}$. После преобразований получаем квадратное уравнение $9y^2+18y-40=0$, корнями которого являются числа $4/3$ и $-10/3$.

Возвращаясь к переменной $x$, получаем два уравнения:

1) $\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-4x-4=0, \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ или $x=2$;

2) $\frac{x^2}{x+1}=-\frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+10x+10=0, \\ x+1\neq 0. \end{cases}$

Это уравнение корней не имеет, поскольку $D=10^2-4\cdot 3\cdot 10<0$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$; 2.

**16.** Решите уравнение $2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2=0$.

Решение. Сделаем замену $y=\sqrt{x^2-3x+6}$. Тогда $y\geqslant 0$, $x^2-3x=y^2-6$. Получаем уравнение относительно переменной $y$:

$$2(y^2-6)+y+2=0 \;\Leftrightarrow\; 2y^2+y-10=0 \;\Leftrightarrow\; y=2 \text{ или } y=-2{,}5.$$

Второй корень не удовлетворяет условию $y\geqslant 0$, поэтому исходное уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{x^2-3x+6}=2 \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+6=4 \;\Leftrightarrow\; x=1 \text{ или } x=2.$$

Ответ: 1; 2.

**17.** Решите уравнение $x\sqrt{3-x}-5x=1+\sqrt{3-x}$.

Решение. Обозначим $y=\sqrt{3-x}$, тогда $y\geqslant 0$ и $x=3-y^2$. Данное уравнение принимает вид

$$(3-y^2)y-5(3-y^2)=1+y \;\Leftrightarrow\; y^3-5y^2-2y+16=0.$$

Разложим левую часть полученного кубического уравнения на множители. Рациональный корень (если он есть) многочлена $y^3-5y^2-2y+16$ является нулем или делителем его свободного члена. Подставляя числа 0, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 4$, $\pm 8$, $\pm 16$ в качестве $y$ в левую часть уравнения, найдем корень $y_1=2$. Значит, левая часть уравнения раскладывается на множители, один из которых равен $y-2$. Получаем:

$$(y-2)(y^2-3y-8)=0.$$

Для нахождения остальных корней решим уравнение $y^2-3y-8=0$. Его корни суть $y_2=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$ и $y_3=\frac{3-\sqrt{41}}{2}$. Так как $y_2>0$, $y_3<0$, то, возвращаясь к переменной $x$, решаем уравнения:

1) $\sqrt{3-x}=2 \Leftrightarrow x=-1$; 2) $\sqrt{3-x}=\frac{3+\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{19+3\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: $-1$; $-\frac{19+3\sqrt{41}}{2}$.



**18.** Решите уравнение $6x^2+7x\sqrt{x+1}=24(x+1)$.

Решение. Перенесем $24(x+1)$ в левую часть и разделим обе части уравнения на $x+1$ (легко видеть, что $x=-1$ не является решением уравнения). Получим:

$$6\frac{x^2}{x+1}+7\frac{x}{\sqrt{x+1}}-24=0.$$

Теперь естественным образом введем новую переменную $y=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

Тогда $6y^2+7y-24=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$ или $y=-\frac{8}{3}$.

Решим получившиеся уравнения.

1. $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3}{2} \Rightarrow 4x^2-9x-9=0 \Leftrightarrow x=3$ или $x=-\frac{3}{4}$. При возведении в квадрат мог возникнуть посторонний корень. Проверка показывает, что корень $x=3$ удовлетворяет уравнению, а корень $x=-\frac{3}{4}$ — посторонний.

2. $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=-\frac{8}{3} \Rightarrow 9x^2-64x-64=0 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{9}$ или $x=8$. При возведении в квадрат мог возникнуть посторонний корень. Проверка показывает, что корень $x=-\frac{8}{9}$ удовлетворяет уравнению, а корень $x=8$ — посторонний.

Ответ: $-\frac{8}{9}$; 3.

**19.** Решите неравенство $\sqrt{x+3}+\frac{x}{2}\geqslant 0$.

Решение. Сделаем замену $y=\sqrt{x+3}$, тогда $x=y^2-3$. После преобразований получим неравенство $y^2+2y-3\geqslant 0$, решение которого имеет вид $y\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Возвращаясь к переменной $x$, получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}\leqslant -3, \\ \sqrt{x+3}\geqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x\geqslant -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geqslant -2.$$

Ответ: $[-2;+\infty)$.

## Упражнения

Решите уравнения (**20—30**):

**20.** $2\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=10$.

**21.** а) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$; б) $(x^2+x+1)(6-x^2-x)=10$.

**22.** а) $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$; б) $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$.

**23.** а) $x(x-1)(x-2)(x-3)=24$;
б) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=114$.

**24.** а) $(x-4)^4+x^4=82$; б) $(x-1)^4+(x+3)^4=626$.

**25.** а) $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$;
б) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

**26.** а) $(x^2+3x+4)(x^2+4x+5)=2(x+1)^2$;
б) $(x-3)(x-2)(x-4)(x-7)=7(x-1)^2$.

**27.** а) $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$; б) $3\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$.

**28.** а) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x+5}{x-5}=\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x+4}{x-4}$;
б) $\dfrac{1}{x-7}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-4}=0$.

**29.** а) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{2}{3}$; б) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$.

**30.** а) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\cdot\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$; б) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{45}{16}$.

Решите неравенства (**31—33**):

**31.** а) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5$;
б) $(-x^2+2x+2)(x^2-2x+4)\geqslant 5$.

**32.** а) $\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}-3}\leqslant 2$; б) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1}\geqslant 2\sqrt{x}$.

**33.** а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}<0$;
б) $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+8}>0$.