МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПРОЦЕНТЫ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2007

УДК 51(023)
ББК 22.1
П78

П78 **Проценты:** Методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / Автор-составитель А. В. Деревянкин. — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. — 12 с.

В разработке рассмотрены различные задачи, содержащие действия с процентами (простые и сложные проценты, процентное содержание) и приведены примеры вычислений.

ББК 22.1

Проценты.

Автор-составитель А. В. Деревянкин.

Редактор Е. А. Федосеева. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
117234, Москва, В-234, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

§ 1. Понятие процента. Простейшие вычисления с процентами.

*Один процент**) от некоторого числа или величины — это сотая доля этого числа или величины.

Обозначение: 1%.

Например, 1% от числа 150 равен 1,5; 1% от 18 м равен 18 см.

Заметим очевидный факт: 100% от числа равны этому числу.

Выясним, как найти требуемый процент от числа. Но сперва вспомним, как найти долю от числа, выраженную обыкновенной или десятичной дробью. Как вы знаете, для этого надо просто умножить данное число на эту долю: например, $\frac{1}{3}$ от числа 90 составляет $90\cdot\frac{1}{3}=30$; 0,28 от числа 50 равняется $50\cdot 0{,}28=14$. Теперь рассмотрим задачу на нахождение процента от числа.

1. Найдите 20% от числа 80.

Решение. 1% от числа 80 — это одна сотая часть данного числа, т. е. $80\cdot 0{,}01=0{,}8$. Отсюда 20% равны $0{,}8\cdot 20=16$.

Можно предложить и другой вариант решения. Само число 80 — это 100%. Тогда 20% от него составят долю в $\frac{20\%}{100\%}=\frac{1}{5}$. Таким образом, нам необходимо найти $\frac{1}{5}$ от числа 80, что равно $80\cdot\frac{1}{5}=16$.

Ответ: 16.

Итак, мы можем сформулировать два основных способа нахождения требуемого процента от числа.

1) Найти, чему равен 1% от числа, а затем умножить эту величину на заданное число процентов.

2) Найти, какую долю от числа составляет данный процент (т. е. перевести проценты в обыкновенную или десятичную дробь путём деления на 100%), а затем умножить исходное число на эту долю.

При решении задач можно применять любой из этих способов.

*) Это название происходит от латинского «про центум», что означает «на сто».

Мы научились находить процент от числа. Рассмотрим теперь такую задачу: пусть дано, что a% от неизвестного числа b равны c. Требуется найти b.

2. 30% от некоторого числа равны 37,5. Найдите это число.

Р е ш е н и е. Как и в задаче **1**, здесь можно предложить два варианта решения.

1) 1% от искомого числа составляет $\frac{37{,}5}{30}=1{,}25$. Тогда само число (100%) равно $1{,}25\cdot 100=125$.

2) 30% соответствуют доле в $\frac{3}{10}$. Таким образом, $\frac{3}{10}b=37{,}5$, где b — искомое число. Отсюда $b=37{,}5\cdot\frac{10}{3}=125$.

О т в е т: 125.

Таким образом, найти число по проценту можно двумя основными способами:

1) Найти, чему равен 1% искомого числа, а затем результат умножить на 100.

2) Выразить процент дробью (обыкновенной или десятичной), а потом разделить заданную часть числа на эту дробь.

Заодно мы вспомнили, как найти число по его доле: надо разделить данное число на эту долю. Например, если $\frac{7}{10}$ некоторого числа равны 28, то само это число равно $28:\frac{7}{10}=40$.

Подумайте самостоятельно, как определить, сколько процентов составляет одно число от другого, если даны оба этих числа.

Упражнения

3. Переведите в обыкновенную дробь:

2%, 5%, 7%, 10%, 20%, 25%, 50%, 65%, 112%, 128%.

П р и м е ч а н и е. Получающиеся дроби обязательно следует сокращать!

4. Выразите дроби процентами:

$\frac{1}{500}$, $\frac{1}{200}$, $\frac{2}{125}$, $\frac{7}{400}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{17}{4}$, $\frac{100}{16}$.

5. Найдите: 5% от 40; 7% от 30; 25% от 84; 39% от 200; 48% от 125; 114% от 105; 202% от 1300; 392% от 25.

6. Найдите: $\frac{1}{2}$ от 49; $\frac{1}{17}$ от 68; 0,175 от 12.

7. Найдите число, если: $\frac{1}{2}$ от него составляет 23; $\frac{3}{5}$ от него составляют 129; $\frac{13}{18}$ от него составляют 156; $\frac{3}{2}$ от него составляют 177.

8. Найдите число, если: 7% от него равны 0,28; 25% от него равны 2,75; 48% от него равны 0,96; 140% от него равны 112; 150% от него равны 7,5; 320% от него равны 120.

9. Определите, сколько процентов составляет одно число от другого: 2,8 от 700; 10 от 80; 16 от 200; 16,5 от 110; 48 от 6; 91 от 130.

10. Что больше: 27% от числа 178 или 178% от числа 27?

11. Батон хлеба стоил 6 руб. 40 коп., а через некоторое время его цена составляла уже 8 руб. На сколько процентов увеличилась цена батона? Сколько он будет стоить, если его цена ещё раз вырастет на столько же процентов?

П р и м е ч а н и е. На разных этапах решения за 100% могут приниматься разные величины.

12. Число a на 60% больше числа b. На сколько процентов b меньше a?

13. В двух бидонах находится 120 л молока. Если из первого бидона перелить во второй 40% молока, содержащегося в первом бидоне, то молока во втором бидоне станет на 50% больше, чем в первом. Сколько молока изначально было в каждом из бидонов?

14. Цена товара снизилась на 20%, а затем повысилась на 20%. Будет ли новая цена больше или меньше исходной? А если, наоборот, сперва провести повышение цены на 20%, а затем её снижение на 20%?

15. Товар стоил 120 руб. Его цена сначала повысилась на 10%, затем ещё на 15%, после чего снизилась на 5%. Сколько теперь стоит этот товар?

16. Сторону квадрата увеличили на 10%. На сколько процентов увеличился периметр этого квадрата? площадь квадрата?

17. Завод выпустил 399 автомобилей (грузовых и легковых). Сколько было выпущено грузовых автомобилей, если:

а) легковых было выпущено на 10% больше, чем грузовых;

б) грузовых было выпущено на 10% меньше, чем легковых?

18. Стоимость товара вместе с доставкой составляет 3942 руб., причём стоимость доставки составляет 8% от стоимости самого товара. Определите, сколько стоит товар без доставки.

19. Известно, что в лыжном кроссе приняло участие больше, чем 96,8% членов школьной лыжной секции, но меньше, чем 97,2%. Определите минимально возможное количество членов этой секции.

20. В классе 32% учеников не имеют троек по математике, а 48% — по русскому языку. С тройками по обоим предметам учится 40% класса. Сколько школьников успевает без троек и по русскому языку, и по математике, если в классе 25 человек?

21. За 1 кг одного продукта и 10 кг другого продукта было заплачено 200 руб. Если первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то стоимость такой же покупки будет равна 182 руб. Определите стоимость 1 кг каждого из продуктов.

22. В колбе изначально находится 1000 бактерий. В результате их размножения каждый час количество бактерий в колбе увеличивается на 11%; кроме того, по истечении каждого часа из колбы берётся порция, содержащая 120 бактерий. Наступит ли когда-нибудь момент, когда количество бактерий в колбе удвоится?

§ 2. Простые и сложные проценты. Рассмотрим следующую задачу.

23. В 1995 году завод выпустил 12 500 автомобилей. Каждый год в течение последующих 5 лет выпуск автомобилей увеличивался на 6% от этого количества. Найдите, сколько автомобилей было выпущено заводом в 2000 году.

Решение. Ежегодный выпуск автомобилей увеличивался на 6% от 12 500, т. е. на $12\,500\cdot 0{,}06=750$ (автомобилей). Таким образом, за 5 лет он вырос на $5\cdot 750=3750$ (автомобилей) и составил $12\,500+3750=16\,250$ (автомобилей).

Ответ: 16 250 автомобилей.

Получим теперь общую формулу, позволяющую находить ответ в задачах такого типа. При решении задачи мы увидели, что каждый год выпуск автомобилей увеличивался на $\frac{6}{100}a_0$, где a_0 — начальный объём производства (в 1995 году). А если бы процент увеличения производства был равен p%, то тогда выпуск автомобилей каждый год увеличивался бы на $\frac{p}{100}a_0$. Следовательно, за t лет объём производства увеличится на $\frac{pt}{100}a_0$ и составит $a_0+\frac{pt}{100}a_0=a_0\left(1+\frac{pt}{100}\right)$. Итак,

$$a_t=a_0\left(1+\frac{pt}{100}\right).$$

Полученная формула называется *формулой простых процентов*. Она используется в тех случаях, когда объём производства каждый год увеличивается на одну и ту же величину. Конечно, полученную формулу можно использовать и в других подобных задачах: так, например, величина a_0 может обозначать не только объём производства, но и население некоторого района, и количество денег на банковском счёте и т. п. Напомним использованные в ней обозначения:

t — рассматриваемый промежуток времени (в годах);
a_0 — начальный объём производства (население, денежная сумма и т. п.);
a_t — объём производства через t лет;
p% от a_0 — ежегодный прирост производства.

Вопрос для самопроверки: на сколько процентов от объёма выпуска в 1995 году надо было ежегодно увеличивать производство, чтобы в 2000 году с конвейера сошло 17 500 автомобилей? (Ответ: на 8%.)

На практике, однако, чаще используются так называемые *сложные проценты*. Для знакомства с ними рассмотрим ещё одну задачу.

24. В банк положено 1000 руб. под 10% годовых. Сколько денег будет на счёте через 3 года?

Решение. Прирост вклада за первый год будет равен 10% от 1000 руб., т. е. 1000 руб.$\cdot 0{,}1=100$ руб., поэтому через год на счёте в банке будет 1100 руб. Прирост капитала за второй год также будет равен 10%, но уже от новой суммы (в этом и состоит принципиальное различие простых и сложных процентов: в простых процентах, рассмотренных выше, процент берётся всё время от исходной величины). Таким образом, за второй год сумма на счёте вырастет на 1100 руб.$\cdot 0{,}1=110$ руб. и составит 1210 руб. За третий год она увеличится на 1210 руб.$\cdot 0{,}1=121$ руб. и составит уже 1331 руб.

Ответ: 1331 руб.

Заметим такой факт: если в начале года на нашем счёте было a_0 руб., то прирост за год составит $0{,}1a_0$ руб., поэтому через год на счёте будет уже $1{,}1a_0$ руб. Если же годовая процентная ставка была бы равна не 10%, а p%, то годовой прирост составил бы, очевидно, $\frac{p}{100}a_0$ руб., и тогда через год в банке лежало бы $\left(1+\frac{p}{100}\right)a_0$ руб. Как видим, исходная сумма увеличилась в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз. Ещё за год она опять увеличится во столько же раз (так как увеличение происходит снова на столько же процентов, но уже от новой суммы) и составит, следовательно, $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 a_0$ руб. Рассуждая аналогично, сделаем вывод, что при исходной сумме в a_0 руб. через три года у нас будет $\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 a_0$ руб., а через t лет — $\left(1+\frac{p}{100}\right)^t a_0$ руб. Таким образом, получаем формулу *сложных процентов*:

$$a_t=a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t. \qquad (*)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в формуле простых процентов.

Поставим дополнительный вопрос к задаче **24**:

25. За какое минимальное число лет положенная на счёт сумма увеличится в 1,5 раза?

Решение. Надо найти наименьшее натуральное t, для которого $a_t \geqslant 1{,}5a_0$. С учётом выражения для a_t имеем:

$$a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \geqslant 1{,}5a_0 \quad \Leftrightarrow^{*)} \quad \left(1+\frac{p}{100}\right)^t \geqslant 1{,}5.$$

Подставив $p=10$, получим: $1{,}1^t \geqslant 1{,}5$.

Вычислим несколько степеней числа 1,1: $1{,}1^1=1{,}1$; $1{,}1^2=1{,}21$; $1{,}1^3=1{,}331$; $1{,}1^4=1{,}4641$; $1{,}1^5=1{,}61051$. Видим, что минимальное t, при котором $1{,}1^t \geqslant 1{,}5$, равно 5.

Ответ: через 5 лет.

Формула (*) применяется в различных науках. Так, например, биологи с её помощью описывают рост числа особей в популяции (здесь использован тот факт, что ежегодный прирост численности приблизительно пропорционален количеству живущих особей). В ядерной физике формулой (*) описывается радиоактивный распад вещества. Здесь a — начальная масса вещества, p — коэффициент, характеризующий интенсивность распада ($|p|$ — это процентная доля вещества, распадающегося в единицу времени). Заметим, что в данном случае $p<0$: со временем количество вещества уменьшается.

Упражнения

26. В банк положено 800 руб. под 7% годовых. Каждый год вкладчик снимает со счёта проценты, накопившиеся за этот год. Какова будет прибыль: а) за 2 года; б) за 9 лет?

27. Решите пункт а) задачи **26** в предположении, что накопившиеся проценты не снимаются со счёта.

28. В течение одного года инфляция**) цены на некоторый товар составляла 10% в месяц. 1-го января цена товара составляла 300 руб. Сколько стоил этот товар 1-го февраля? 1-го марта? 1-го апреля? 1-го июля? 1-го января следующего года?

Замечание. Не забудьте разумно округлить ответы к этой задаче!

29. Имеется 1000 руб. Рассмотрим два варианта использования этой суммы:

1) положить деньги в банк под 12% на 6 лет;

2) положить деньги в банк под 15% на 6 лет, снимая каждый год накопившуюся прибыль.

*) Знак $\Leftrightarrow$ обозначает переход от неравенства (уравнения) к другому, равносильному ему.

**) Инфляция — это увеличение цены товара; процент возрастания цены и называется процентом инфляции.

Какой из этих способов обеспечит больший доход по истечении 6 лет? Зависит ли ответ от начальной суммы?

30. Население города составляет 520 тыс. человек и увеличивается на 2% ежегодно. Определите, не проводя сложных вычислений, достигнет ли численность жителей этого города отметки в 1 млн. человек через 50 лет при сохранении таких темпов роста.

31. Директор одного из коммерческих банков заявил: «Мы принимаем вклады на срок от одного года под 20% годовых. Таким образом, ваша прибыль за 5 лет составит 100% — всего лишь за 5 лет вы удвоите свой капитал!». Математик, услышав это, заметил, что, пользуясь услугами этого банка, можно удвоить свои сбережения и быстрее — всего за 4 года. Прав ли он?

32. Тело охладилось от 100 °C до 60 °C за 10 мин. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20 °C. За какое время тело остынет от 60 °C до 25 °C? Скорость остывания тела прямо пропорциональна разности температур тела и окружающего воздуха.

§ 3. Процентное содержание некоторого вещества в растворе (сплаве и т. п.) — отношение массы этого вещества к общей массе раствора (сплава и т. п.), выраженное в процентах. Впрочем, иногда рассматривается отношение не масс, а объёмов (объёмные проценты) или иных величин, характеризующих количество. В этой брошюре мы будем иметь дело только с массовыми процентами, если специально не оговорено иное.

Вот несколько примеров процентного содержания:

1) Жирность — процентное содержание жиров в продукте. Если, например, на пакете с молоком написано «жирность 6%», то это значит, что масса содержащихся в нём жиров составляет 6% от общей массы молока в пакете.

2) Концентрация раствора некоторого вещества — процентное содержание этого вещества в растворе: так, например, если концентрация раствора серной кислоты равна 20%, то, значит, масса серной кислоты составляет 20% от массы раствора.

Решим две задачи на процентное содержание.

33. В лесу сосны составляли 99% от общего числа деревьев. После того, как некоторую часть сосен вырубили, их стало 98% от общего числа деревьев. Какую долю леса вырубили?

Настоятельно советуем вам сначала попытаться решить эту задачу самостоятельно, и лишь затем прочитать приведённое ниже решение.

Решение задачи **33**. Сосны составляли 99% от общего числа деревьев, тогда все остальные деревья — это 1%. Таким образом, если несосен было a штук, то всего деревьев в лесу изначально было $100a$. Поскольку вырубали только сосны, то количество других деревьев не изменилось и по-прежнему равно a. Но теперь это уже

2% от общего числа деревьев (так как сосен стало 98%). Тогда число деревьев в лесу после вырубки равно $\frac{a}{2}\cdot 100=50a$. Значит, вырубили $100a-50a=50a$ деревьев, т. е. $\frac{50a}{100a}=\frac{1}{2}$ от их общего числа.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Мы воспользовались тем, что количество деревьев, не являющихся соснами, осталось прежним. Такой приём часто применяется при решении подобных задач. Так, например, при подсушивании фруктов (овощей, грибов и т. д.) испаряется только вода, а масса мякоти не меняется. При выпаривании солевого раствора также испаряется лишь жидкость, в то время как масса соли остаётся неизменной.

34. При смешивании 30-процентного и 10-процентного растворов кислоты получили 600 г 15-процентного раствора. Какова была масса каждого из растворов?

Решение. Обозначим массу первого из растворов через x г, второго — через y г. Тогда сразу можно составить первое уравнение:

$$x+y=600.$$

Несложно найти содержание кислоты в растворах, зная её процентное содержание: в первом растворе будет $0{,}3x$ г кислоты, а во втором — $0{,}1y$ г. Общее количество кислоты, таким образом, равно $(0{,}3x+0{,}1y)$ г, а с другой стороны — $0{,}15\cdot 600$ г$=90$ г. Получаем второе уравнение:

$$0{,}3x+0{,}1y=90.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=600,\\ 0{,}3x+0{,}1y=90,\end{cases}$$

находим: $x=150$, $y=450$. Это и есть массы (в граммах) первого и второго растворов.

Ответ: 150 г и 450 г.

Упражнения

35. Процентное содержание воды в свежескошенной траве равно 70%, а в сене — 16%. Сколько надо скосить травы, чтобы получить 600 кг сена?

36. Руда содержит 60% железа. Сколько тонн стали, содержащей 98,8% железа, можно выплавить из 247 т этой руды?

37. Из 22 кг свежих грибов получилось 2,5 кг сушёных, которые содержат 12% воды. Каково процентное содержание воды в свежих грибах?

38. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20%. Сколько сухих фруктов получается из 20 кг свежих?

39. Два куска латуни*) имеют суммарную массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг цинка, а второй — 4 кг. Процентное содержание цинка в первом куске на 15% меньше, чем во втором**). Определите массы кусков.

40. Имеются два куска латуни. В первом куске меди на 640 г больше, чем цинка. Масса меди во втором куске в 7 раз меньше, чем в первом, а масса цинка во втором куске составляет 40% от его массы в первом куске. Известно также, что второй кусок весит 200 г. Найдите массу первого куска.

41. Сплав меди и никеля содержит 22 кг меди. Если бы в этом сплаве было на 15 кг никеля больше, то его процентное содержание было бы больше на 33%. Определите массу сплава.

42. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают пятую часть раствора, а затем раствор в пробирке выпаривают до тех пор, пока концентрация соли в нём не увеличится вдвое. После чего содержимое пробирки выливают обратно в колбу. Оказалось, что в результате таких действий концентрация раствора в колбе увеличилась на 2%. Найдите исходную концентрацию.

43. Бутыль содержала 6-процентный раствор соли. Отлив из бутыли 1 кг раствора, в неё долили 1 кг чистой воды. После перемешивания концентрация соли оказалась равной 4%. Определите массу жидкости, содержащейся в бутыли.

44. Имеются два слитка, состоящие из сплава золота и серебра. Процентное содержание золота в первом слитке в 2,5 раза больше, чем во втором. Если сплавить оба слитка вместе, то получившийся слиток будет содержать 40% золота. Если же сплавить равные по массе части первого и второго слитков, то в полученном слитке процентное содержание золота будет равно 35%. Определите, во сколько раз первый слиток тяжелее второго.

45. При выплавлении двух чугунных заготовок равной массы было использовано 12 кг хрома. Если бы первая заготовка была вдвое тяжелее, то при том же процентном содержании хрома в ней для двух заготовок потребовалось бы 16 кг хрома. Известно также, что процентное содержание хрома в первой заготовке на 5% меньше, чем во второй. Найдите массы заготовок.

46. Имеются три слитка. Первый слиток весит 50 г, второй — 30 г; каждый из этих двух слитков содержит по 30% серебра. Если первый слиток сплавить с третьим, то получившийся сплав будет содержать 56% серебра; если же сплавить второй и третий слитки, то в полученном сплаве будет 60% серебра. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание серебра в нём.

*) Латунь — сплав меди и цинка.

) Это значит, что если второй кусок содержит a% цинка, то первый содержит $(a-15)$%. Аналогичное замечание относится к задачам **41, **42** и **45**.

47. Имеются два сплава, состоящие из вольфрама, молибдена и рения. Известно, что первый сплав содержит 35% рения, а второй — 50% вольфрама. Процентное содержание молибдена в первом сплаве в 1,5 раза больше, чем во втором. Переплавив вместе 200 г первого сплава и 300 г второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28% молибдена. Сколько граммов вольфрама содержится в получившемся сплаве?

48. В колбах было два раствора серной кислоты в воде с концентрациями 40% и 60% (по объёму). Их смешали, добавили 5 л воды и в результате получили 20-процентный раствор. Если бы вместо воды добавили 5 л 80-процентного раствора серной кислоты, то концентрация получившегося раствора оказалась бы равной 70%. Определите исходные объёмы растворов.

49. В лаборатории было два раствора соли в воде. Для получения 10-процентного раствора требовалось взять первого раствора вдвое больше (по массе), чем второго. Однако через некоторое время из каждого килограмма растворов испарилось по 200 г воды, в результате чего теперь для приготовления 10-процентного раствора необходимо брать первого раствора уже вчетверо больше, чем второго. Найдите начальные концентрации растворов.

50. Резервуар содержит 80 л воды. Сначала в него через одну трубу вливают 20 л 15-процентного (по объёму) раствора кислоты, а затем, после тщательного перемешивания, через другую трубу сливают 20 л образовавшегося раствора. После чего описанную операцию повторяют ещё один раз. Определите конечную концентрацию кислоты в резервуаре.