МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
П39

П39 **Площади** многоугольников: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / сост. Е. Ю. Иванова. — М. : изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 27 с. : ил.

В разработке приведены основные свойства площадей многоугольников и формулы, служащие для нахождения площадей. Разобраны примеры задач на поиск площадей, приведены примеры решения задач с использованием теорем Чевы и Менелая и задач на доказательство геометрических неравенств.

ББК 22.1

Площади многоугольников.

Составитель Е. Ю. Иванова.

Редакторы А. В. Деревянкин, Д. А. Калинин.
Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

§ 1. Основные свойства площадей

Перечислим основные свойства площадей, которые нам будут нужны при решении задач.

A. Площадь плоской фигуры — неотрицательное число.

B. Площади равных фигур равны.

C. Если фигура разрезана на несколько частей, то её площадь равна сумме площадей этих частей.

D. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

Используя эти свойства, можно показать, что площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон; затем — что площадь параллелограмма равна произведению его основания и высоты; после этого можно получить формулу для площади треугольника.

E. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, опущенную на основание.

Отметим, что это произведение не зависит от того, какую именно сторону и соответствующую ей высоту мы возьмём.

Так как любой многоугольник можно разбить на треугольники, то, используя свойства C и E, мы тем самым можем свести задачу нахождения площади произвольного многоугольника к задаче нахождения площадей нескольких треугольников (разбиение сложной фигуры на треугольники называют *триангуляцией*).

З а м е ч а н и е. Существование разбиения на треугольники для выпуклого многоугольника очевидно. Можно, например, провести все диагонали, выходящие из одной вершины. Для невыпуклого многоугольника строгое доказательство существования разбиения гораздо сложнее (хотя на первый взгляд возможность такого разбиения может показаться очевидной), поэтому примем тот факт, что любой невыпуклый четырёхугольник можно разбить на треугольники, без доказательства.

§ 2. Разрезания и складывания

В этом параграфе собраны задачи, которые можно решить без вычислений, проведя лишь простые геометрические построения и используя только свойства площадей В и С.

Основной принцип метода «разрезания и складывания» основан на том, что если два многоугольника удаётся разбить на одинаковые части (такие многоугольники называют *равносоставленными*), то отсюда вытекает, что площади этих многоугольников равны (фигуры, площади которых равны, называются *равновеликими*).

Справедлива следующая теорема (доказательство её выходит за рамки школьной программы).

Т е о р е м а. Если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых можно составить другой многоугольник.

Обратное утверждение (если два многоугольника равносоставлены, то они равновелики) непосредственно следует из свойств В и С.

Таким образом, *два многоугольника равновелики тогда и только тогда, когда они равносоставлены.* Это утверждение называется теоремой Бойяи—Гервина, а с её доказательством вы можете познакомиться, например, по книге В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (22-й выпуск серии «Популярные лекции по математике»).

Разбиение фигур на части, из которых потом будут составлены другие фигуры, требует определённой изобретательности. Продемонстрируем этот приём на простых примерах.

1. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим для данного восьмиугольника прямоугольник, как изображено на рис. 1 (подумайте, как строго выполнить такое построение). Прямоугольник и восьмиугольник равновелики, так как пары прямоугольных треугольников, отмеченные на этом рисунке стрелками, равны (доказательство этого факта оставляем вам в качестве самостоятельного упражнения; проще всего доказать равенство треугольников по катету и гипотенузе).

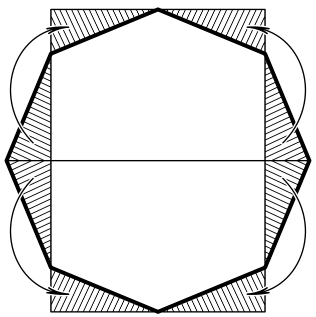

Рис. 1

Большая и меньшая стороны прямоугольника, очевидно, равны наибольшей и наименьшей диагонали восьмиугольника соответственно. Таким образом, площадь прямоугольника, а, значит, и площадь восьмиугольника, равна произведению наибольшей и наименьшей диагоналей восьмиугольника, что и требовалось доказать.

2. Докажите, что средняя линия треугольника площади S отсекает от него треугольник площади $S/4$.

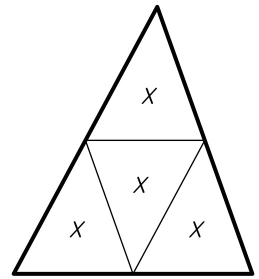

Рис. 2

Д о к а з а т е л ь с т в о Проведём все средние линии треугольника (рис. 2). Они разбивают исходный треугольник на четыре треугольника. Все эти треугольники равны по трём сторонам (средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны, поэтому каждый из треугольников имеет стороны $a/2$, $b/2$, $c/2$, где a, b, c — стороны исходного треугольника). Следовательно, все четыре треугольника имеют одинаковую площадь, которую мы обозначим через X. Сумма их площадей равна $4X$; с другой стороны, она равна S. Таким образом, $X=S/4$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Предыдущий результат, конечно, можно получить многими другими способами. Этот результат неоднократно пригодится в последующих задачах.

3. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на неё из середины другой боковой стороны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC, точка K — середина стороны CD и KH — перпендикуляр, опущенный на прямую AB. Проведём через точку K прямую, параллельную прямой AB. Пусть M и P — точки её пересечения с прямыми AD и BC соответственно (рис. 3). Параллелограмм $ABPM$ равновелик данной трапеции, так как пятиугольник $ABCKM$ является для этих двух фигур общим, а треугольники KPC и KMD равны (почему?). Таким образом, параллелограмм и трапеция составлены из одинаковых частей и, следовательно, имеют одинаковые площади. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания AB на высоту KH, то и площадь трапеции равна $AB \cdot KH$, что и требовалось доказать.

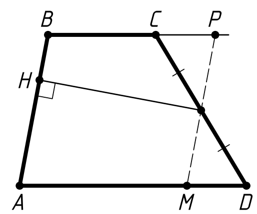

Рис. 3

З а м е ч а н и е. Доказательство равенства площадей трапеции и параллелограмма более формально можно изложить следующим образом:

$$S_{ABPM}=S_{ABCKM}+S_{KPC}, \quad S_{ABCD}=S_{ABCKM}+S_{KMD},$$

$\triangle KPC=\triangle KMD$ по стороне и двум прилежащим

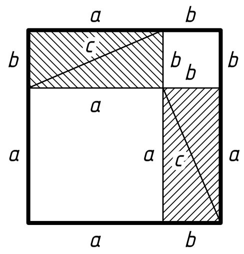

Рис. 4

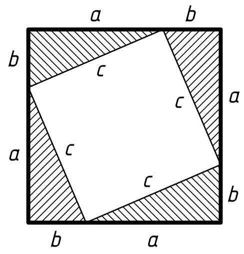

Рис. 5

углам ($KC=KD$ по условию, $\angle PKC=\angle MKD$ как вертикальные, $\angle KCP=\angle KDM$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD), следовательно, $S_{KPC}=S_{KMD}$, откуда $S_{ABPM}=S_{ABCD}$.

В заключение этого параграфа покажем, как можно доказать методом «разрезания и складывания» теорему Пифагора. Пусть дан квадрат со стороной $a+b$. Разрежем его так, как показано на рис. 4. Получатся два квадрата с длинами сторон a и b и четыре заштрихованных прямоугольных треугольника с катетами a и b; обозначим их гипотенузу через c.

Разрежем тот же квадрат так, как показано на рис. 5. Получим четыре таких же прямоугольных треугольника, как на рис. 4, и квадрат со стороной c (подумайте, как доказать, что это действительно квадрат).

Поскольку прямоугольные треугольники на рис. 4 и 5 равны, то площади незаштрихованных частей на этих рисунках также равны, т. е. $a^2+b^2=c^2$, что и требовалось доказать.

Упражнения

4. Докажите, что не каждый разносторонний треугольник можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD точка K — середина отрезка AB — соединена с вершинами C и D. Найдите отношение площади треугольника KCD к площади трапеции.

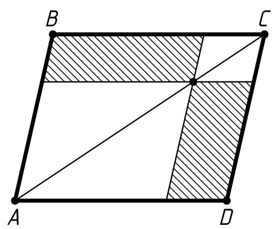

Рис. 6

6. Через произвольную точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится этими прямыми на четыре параллелограмма, два из которых пересекает диагональ AC (рис. 6). Докажите, что два других (заштрихованных) параллелограмма равновелики.

7. В выпуклом четырёхугольнике последовательно соединены середины сторон. Найдите отношение площадей полученного и исходного четырёхугольников.

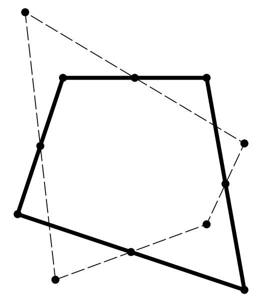
Рис. 7

8. Докажите, что если два выпуклых четырёхугольника расположены так, что середины их сторон совпадают (рис. 7), то их площади равны.

9. Через каждую вершину выпуклого четырёхугольника проведена прямая, параллельная его диагонали. Точки пересечения этих прямых образуют новый четырёхугольник. Докажите, что полученный четырёхугольник по площади вдвое больше исходного.

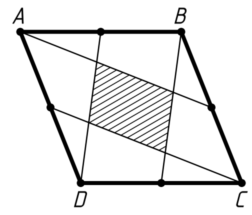

Рис. 8

10. Произвольная точка плоскости M отражается центрально-симметрично относительно середин сторон некоторого выпуклого четырёхугольника. Полученные при этом точки являются вершинами нового четырёхугольника. Определите его вид и найдите отношение его площади к площади исходного четырёхугольника.

11. В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка: вершина A соединена с серединой стороны BC, вершина B — с серединой стороны CD, вершина C — с серединой стороны DA, а вершина D — с серединой стороны AB. Докажите, что четырёхугольник, образуемый этими четырьмя отрезками (рис. 8), — параллелограмм, и что его площадь в пять раз меньше площади параллелограмма $ABCD$.

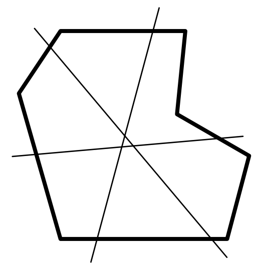
Рис. 9

Указание. Посмотрите на рис. 8 и подумайте, как из девяти частей, на которые разрезан исходный параллелограмм, сложить пять одинаковых параллелограммов.

12. Каждая из трёх прямых делит площадь многоугольника пополам (рис. 9). Докажите, что площадь треугольника, образованного этими прямыми, меньше $1/4$ площади многоугольника.

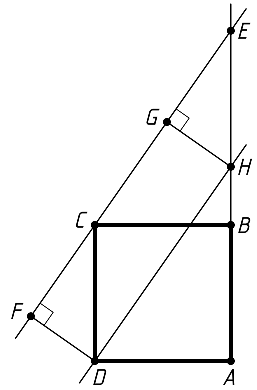

Рис. 10

13. Через вершины C и D квадрата $ABCD$ проведены параллельные прямые, пересекающие продолжение стороны AB в точках E и H соответственно. Из точек D и H опущены перпендикуляры DF и HG на прямую CE (рис. 10). Докажите, что квадрат $ABCD$ равновелик прямоугольнику $DFGH$.

§ 3. Соотношения между элементами треугольника

При решении геометрических задач треугольники играют существенную роль. Различные элементы многоугольников и их площадь можно найти, разбивая их на треугольники и проводя вычисления для отдельных треугольников. Поэтому очень полезно знать различные выражения, связывающие элементы треугольника. Мы приведём несколько формул; некоторые из них вам знакомы, а некоторые, вероятно, вы увидите впервые. Полезно помнить основные из этих формул и уметь все их доказывать.

Во всех формулах параграфа, если отдельно не оговорено иного, будем для произвольного треугольника ABC использовать следующие обозначения:

- a, b и c — соответственно стороны BC, AC и AB;
- p — полупериметр;
- r — радиус вписанной окружности;
- R — радиус описанной окружности;
- S — площадь треугольника ABC;
- r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей (на рис. 11 изображена вневписанная окружность радиуса r_a, касающаяся стороны a и продолжений сторон b, c);
- h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на стороны a, b и c соответственно;
- m_a, m_b, m_c — медианы, исходящие из вершин A, B и C соответственно;
- l_a, l_b, l_c — биссектрисы, исходящие из вершин A, B и C соответственно.

Начнём с хорошо известных вам теорем.

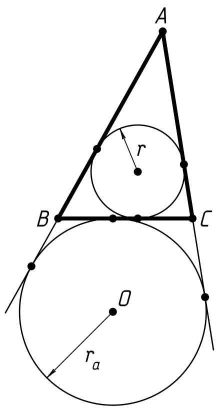

Рис. 11

Т е о р е м а к о с и н у с о в. В любом треугольнике

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C.$$

О б о б щ ё н н а я т е о р е м а с и н у с о в. В любом треугольнике

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R.$$

Отметим, что равенство $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$ называется обычной *теоремой синусов*.

Приведём теперь 14 формул, выражающих площадь треугольника через различные элементы треугольника и радиусы его вписанной, описанной и вневписанных окружностей.

1. $S=\frac{1}{2}ah_a$. 2. $S=\frac{1}{2}ab\sin\angle C$. 3. $S=\frac{abc}{4R}$.

4. $S=pr$. 5. $S=r_a(p-a)$.

6. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*).

7. $S=\frac{r_ar_br_c}{p}$. 8. $S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}$. 9. $S=\sqrt{rr_ar_br_c}$.

10. $S=\frac{ar_br_c}{r_b+r_c}$. 11. $S=\sqrt{abcp\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}}$.

12. $S=2R^2\sin\angle A\sin\angle B\sin\angle C$. 13. $S=c^2\cdot\frac{\sin\angle A\sin\angle B}{2\sin\angle C}$.

14. $S=p^2\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle C}{2}$.

Формулы 1—4 и 6 были доказаны в курсе геометрии.

Формула 5 доказывается аналогично формуле 4. Действительно, если O — центр вневписанной окружности (рис. 11), то

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}=\frac{1}{2}r_a(AB+AC-BC)=r_a(p-a).$$

Подставив в формулу Герона выражения для $p-a$, $p-b$, $p-c$ через площадь треугольника и радиусы вневписанных окружностей, полученные из формулы 5, можно вывести формулу 7; если же ещё подставить в формулу Герона выражение для p из формулы 4, то получится формула 8.

Чтобы получить формулу 9, необходимо воспользоваться тождеством $(p-b)+(p-c)=a$; выразив $p-b$ и $p-c$ при помощи формулы 5 через площадь треугольника и радиусы вневписанных окружностей, после несложных преобразований получим требуемый результат.

Формулу 10 можно получить из формулы 5, если заметить, что $AD=p$, где D — точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AB (докажите это равенство самостоятельно), откуда

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}.$$

Из последнего равенства вытекает также равносильность формул 7 и 14.

Наибольшую сложность, вероятно, представляет доказательство формулы 11. Возможен следующий путь: сперва следует выразить $\cos\angle A$ через стороны треугольника при помощи теоремы косинусов. Зная $\cos\angle A$, можно при помощи формулы синуса двойного угла доказать, что $\sin\frac{\angle A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$. Выразив аналогичным образом синусы двух

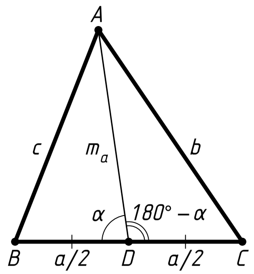

Рис. 12

других половинных углов, подставив их в выражение $\sqrt{abcp\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}}$ и проведя преобразования, можно убедиться в том, что оно в точности равно S.

Формулы 12 и 13 могут быть получены из формулы 3 с помощью обобщённой теоремы синусов.

14. Проведите подробные доказательства формул 5, 7—14.

15. В треугольнике даны стороны a, b, c. Найдите а) $\cos\angle A$; б) r; в) R; г) h_a; д) m_a; е) l_a.

Р е ш е н и е **15**д. Проведём в треугольнике ABC медиану AD (рис. 12); пусть $\angle ADB=\alpha$, тогда $\angle ADC=180^\circ-\alpha$.

Воспользуемся дважды теоремой косинусов.
Для $\triangle ABD$: $c^2=(a/2)^2+m_a^2-2(a/2)m_a\cos\alpha$.
Для $\triangle ACD$: $b^2=(a/2)^2+m_a^2-2(a/2)m_a\cos(180^\circ-\alpha)$.
Сложим полученные равенства и учтём, что $\cos\alpha=-\cos(180^\circ-\alpha)$:

$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m_a^2 \quad\Leftrightarrow\quad m_a^2-\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства, получим окончательный ответ.

О т в е т: $m_a=\sqrt{\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}$.

Также полезно знать некоторые формулы для элементов прямоугольного треугольника. Пусть катеты прямоугольного треугольника равны a и b, гипотенуза равна c. Тогда имеют место следующие соотношения.

15. $R=\frac{1}{2}c$ (центр описанной окружности — середина гипотенузы).

16. $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

16. Докажите формулы 15 и 16.

17. В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b. Найдите а) $\sin\angle A$; б) h_c; в) m_a и m_c; г) l_a и l_c.

Приведём несколько примеров решения задач с использованием формул площади треугольника.

18. Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна высоте треугольника, опущенной на его боковую сторону.

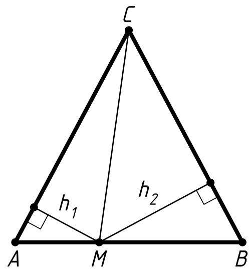

Рис. 13

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай, когда данная точка M совпадает с вершиной A или B, тривиален. Рассмотрим случай, когда M не совпадает с вершинами основания. Пусть длина боковой стороны данного треугольника равна a, длина высоты, опущенной на неё, равна h, расстояния от точки M до боковых сторон равны h_1 и h_2 (рис. 13).

Отрезок CM делит треугольник ABC на два треугольника. Запишем равенство площадей:

$$S_{ABC}=S_{AMC}+S_{BMC},$$

или

$$\frac{ah}{2}=\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2},$$

откуда $h_1+h_2=h$, что и требовалось доказать.

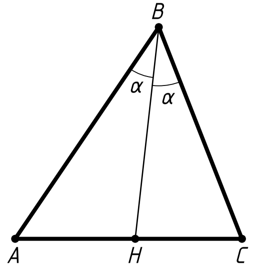

Рис. 14

19. (Т е о р е м а о б и с с е к т р и с с е.) Пусть BH — биссектриса угла B треугольника ABC. Докажите, что $AH{:}HC=AB{:}BC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\angle B=2\alpha$. Тогда (рис. 14)

$$\frac{S_{ABH}}{S_{CBH}}=\frac{0{,}5\cdot BH\cdot BA\cdot\sin\alpha}{0{,}5\cdot BH\cdot BC\cdot\sin\alpha}=\frac{AB}{BC}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{ABH}}{S_{CBH}}=\frac{0{,}5\cdot AH\cdot h}{0{,}5\cdot CH\cdot h}=\frac{AH}{HC}.$$

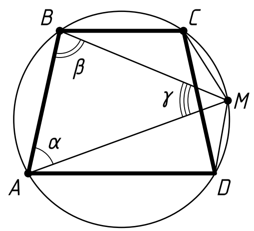

Рис. 15

где h — высота треугольника ABC опущенная из вершины B. Приравнивая правые части полученных равенств, имеем: $AH{:}HC=AB{:}BC$, что и требовалось доказать.

20. Трапеция $ABCD$ (BC и AD — основания) вписана в окружность. На дуге CD взята точка M и соединена со всеми вершинами трапеции. В треугольнике CMD известен угол CMD, равный b, в треугольнике ABM известна разность углов ABM и BAM, равная a. Найдите отношение радиуса r вписанной в треугольник ABM окружности к полупериметру p треугольника ABM.

Р е ш е н и е. Найдём в треугольнике ABM все углы. Обозначим $\angle BAM=\alpha$, $\angle ABM=\beta$, $\angle BMA=\gamma$ (рис. 15). По условию $\beta-\alpha=a$. Из свойств вписанных углов следует, что угол α измеряется половиной дуги BCM, угол β — половиной дуги ADM, угол $CMD=b$ — полусуммой дуг AB, BC и AD. Трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной; следовательно, дуги AB и CD равны. Таким образом, $\alpha+\beta=b$ (проверьте, что как угол $\alpha+\beta$, так и угол b измеряется половиной дуги BMA). Тогда из равенств $\beta-\alpha=a$, $\beta+\alpha=b$ имеем:

$$\beta=\frac{a+b}{2}, \quad \alpha=\frac{b-a}{2};$$

также $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-b$.

Применив формулы 4 и 14 к треугольнику ABM, получаем:

$$S_{ABM}=pr=p^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\frac{\gamma}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{r}{p}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{a+b}{4}\operatorname{tg}\frac{b-a}{4}\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{b}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{a+b}{4}\operatorname{tg}\frac{b-a}{4}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}.$$

О т в е т: $\dfrac{r}{p}=\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{4}\operatorname{tg}\dfrac{b-a}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{b}{2}$.

Упражнения

21. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причём известно, что $AB>A_1B_1$, $AC>A_1C_1$, $BC>B_1C_1$. Верно ли, что площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$?

22. В треугольнике ABC медианы AM и BK перпендикулярны. Найдите площадь треугольника, если $AM=m$, $BK=k$.

23. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, K, L — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. В четырёхугольнике $MNKL$ точки P, Q, R, S — середины сторон MN, NK, KL, LM соответственно. Известно, что $MN=NK$, а $\angle MNK=30^\circ$. Найдите площадь четырёхугольника $PQRS$, если $AC=a$.

24. Докажите, что существует треугольник, сторонами которого являются медианы заданного произвольного треугольника. Найдите его площадь, если площадь исходного треугольника равна S.

25. Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения радиуса этой окружности на периметр многоугольника: $S=pr$.

26. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного треугольника или на его границе, до его сторон равна высоте треугольника.

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказать и более общую теорему: сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного n-угольника или на его границе, до его сторон равна апофеме, умноженной на количество сторон (апофема — расстояние от центра правильного многоугольника до любой из его сторон; оно равно радиусу окружности, вписанной в этот многоугольник).

27. Отрезки MN и PQ делят стороны AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на три равные части (рис. 16). Докажите, что площадь четырёхугольника $MNQP$ составляет треть от площади четырёхугольника $ABCD$.

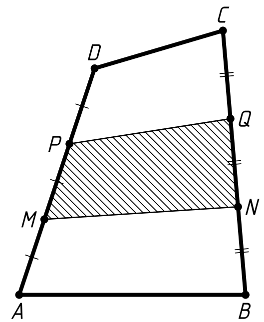

Рис. 16

З а м е ч а н и е. Верно и более общее утверждение: если $n-1$ прямых делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на n равных частей, то площади n получившихся четырёхугольников образуют арифметическую прогрессию.

28. Точки E и K — середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника AED равна сумме площадей треугольников ABK и KCD.

29. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны b и a соответственно; h — длина высоты CC_1; r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC; r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных соответственно в треугольники ACC_1 и BCC_1. Докажите, что а) $r+r_1+r_2=h$; б) $r^2=r_1^2+r_2^2$.

30. Докажите для произвольного треугольника следующие соотношения:

а) $\dfrac{c}{h_a}=\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$; б) $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$;

в) $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2$; г) $r_a+r_b+r_c=4R+r$.

§ 4. Отношения площадей

Очень часто при решении геометрических задач приходится находить, как связаны площади тех или иных фигур. В § 2 мы разобрали один из методов, при помощи которого это можно сделать. Но для того, чтобы установить связь двух площадей, вовсе не обязательно разрезать и складывать фигуры. Например, очень часто бывает удобно сравнивать площади двух треугольников, используя свойство E из § 1. Приведём некоторые очевидные следствия из этого свойства.

У т в е р ж д е н и е 1. Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной его основанию, то его площадь при этом не меняется.

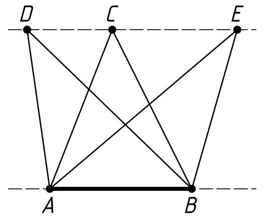

Рис. 17

Поясним это утверждение на примере. Возьмём две параллельные прямые и на одной из них отметим отрезок AB, на другой — произвольные точки C, D и E (рис. 17). Тогда треугольники ABC, ABD и ABE будут иметь одинаковые площади, так как у них общее основание AB и равные высоты, опущенные на это основание.

31. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD (рис. 18). Докажите, что для того, чтобы площади треугольников AOB и COD были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.

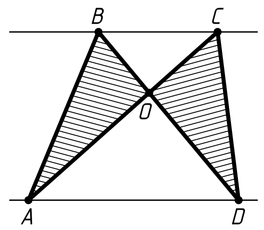

Рис. 18

З а м е ч а н и е. Для того, чтобы решить эту задачу, нужно доказать два утверждения:

1) если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и COD равны;

2) если площади треугольников AOB и COD равны, то прямые BC и AD параллельны.

Вообще, если нужно доказать утверждение «для того, чтобы выполнялось A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B», то требуется доказывать два утверждения:

1) если выполняется A, то выполняется B;

2) если выполняется B, то выполняется A.

Иногда вместо фразы «для того, чтобы выполнялось A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B» говорят «A выполняется тогда и только тогда, когда выполняется B» или «утверждения A и B равносильны». Все эти формулировки эквивалентны.

Р е ш е н и е **31**. Докажем оба сформулированных утверждения.

1. Пусть прямые BC и AD параллельны. По утверждению 1 имеет место равенство $S_{ABD}=S_{ACD}$, тогда $S_{AOB}=S_{ABD}-S_{AOD}=S_{ACD}-S_{AOD}=S_{COD}$.

2. Пусть $S_{AOB}=S_{COD}$. Тогда $S_{ABD}=S_{AOB}+S_{AOD}=S_{COD}+S_{AOD}=S_{ACD}$. Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD; значит, высоты, опущенные на прямую AD из точек B и C, также равны, откуда следует, что прямые AD и BC параллельны, что и требовалось доказать.

Утверждение 1 можно сформулировать в более общем виде.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть дан отрезок AB. Геометрическое место точек M таких, что площадь треугольника ABM равна заданной величине S, есть две прямые, параллельные отрезку AB и находящиеся от прямой AB на расстоянии $h=2S/AB$.

З а м е ч а н и е. Для того, чтобы доказать сформулированное выше утверждение, надо доказать два утверждения:

1) если точка M такова, что $S_{ABM}=S$, то она лежит на одной из указанных прямых;

2) если точка M лежит на одной из указанных прямых, то $S_{ABM}=S$.

32. Дан отрезок AB. Что представляет собой множество точек M, для которых площадь треугольника ABM меньше заданной величины S? Больше S? Изобразите эти множества на рисунке разными цветами.

Приведём ещё одно утверждение, связывающее площади треугольников.

У т в е р ж д е н и е 3. Если треугольники имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению оснований (сторон, на которые опущены высоты). В пару к этому утверждению можно добавить ещё одно.

У т в е р ж д е н и е 4. Если треугольники имеют одинаковые основания, то отношение их площадей равно отношению высот, опущенных на основание.

33. Докажите, что медиана треугольника делит его на две равновеликие части.

34. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

Покажем, как можно применять приведённые утверждения к решению задач.

35. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB выбрана точка K так, что $AB=BK$, а на стороне AC — точка P так, что $AP{:}PC=1{:}2$. Найдите площадь треугольника APK, если площадь треугольника ABC равна 1.

Р е ш е н и е. Рассмотрим вспомогательный треугольник AKC (рис. 19). Треугольники ABC и AKC имеют общую высоту, опущенную из точки C, следовательно,

$$\frac{S_{AKC}}{S_{ABC}}=\frac{AK}{AB}=2.$$

Значит, $S_{AKC}=2$.

Треугольники AKC и AKP имеют общую высоту, опущенную из вершины K, следовательно,

$$\frac{S_{AKC}}{S_{AKP}}=\frac{AC}{AP}=\frac{AP+PC}{AP}=1+\frac{PC}{AP}=3.$$

Следовательно, $S_{AKP}=S_{AKC}/3=2/3$.

О т в е т: 2/3.

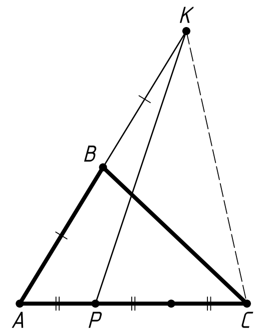

Рис. 19

На данном примере мы, фактически, доказали частный случай следующего утверждения.

Утверждение 5. Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично решению предыдущей задачи. Из него можно получить следствие, связывающее площади подобных треугольников.

Утверждение 6. Если два треугольника подобны с коэффициентом k (стороны одного в k раз больше сторон другого), то отношение их площадей равно k^2 (площадь одного в k^2 раз больше площади другого).

Например, средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого в четыре раза меньше, чем у исходного треугольника (этот факт уже был доказан выше другим способом).

Замечание. Утверждение 5 проще было бы доказать иначе, при помощи формулы площади треугольника: $S=0{,}5ab\sin\angle C$, где a и b — две стороны треугольника, а C — угол, заключённый между этими сторонами. Однако и приведённое решение задачи **35** представляет из себя определённый интерес.

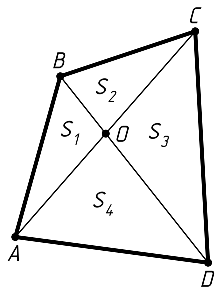

Рис. 20

Разберём несколько примеров.

36. Пусть диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на четыре треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 20). Докажите, что $S_1S_3=S_2S_4$.

Доказательство. Согласно утверждению 3

$$S_1{:}S_4=S_{AOB}=BO{:}OD,$$
$$S_2{:}S_3=S_{COB}{:}S_{COD}=BO{:}OD.$$

Следовательно, $S_1{:}S_4=S_2{:}S_3$, откуда $S_1S_3=S_2S_4$, что и требовалось доказать.

Рассмотренная задача известна под названием «теорема о бабочках».

37. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ середина диагонали AC соединена с серединами сторон AB и AD. Докажите, что площадь полученного четырёхугольника в четыре раза меньше площади $ABCD$.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, а точка O — середина диагонали AC. Точки M и K — середины сторон AB и AD соответственно (рис. 21).

В треугольнике ABC отрезок OM — средняя линия, следовательно, $S_{AMO}=S_{ABC}/4$. Аналогично, $S_{AKO}=S_{ADC}/4$.

Значит,

$$S_{AMOK}=S_{AMO}+S_{AKO}=\frac{S_{ABC}}{4}+\frac{S_{ADC}}{4}=\frac{S_{ABCD}}{4},$$

что и требовалось доказать.

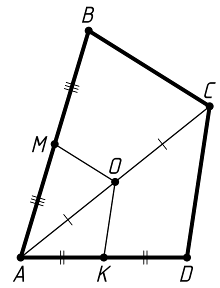

Рис. 21

Замечание. Отметим также, что если вместо середины диагонали выбрать внутри четырёхугольника $ABCD$ произвольную точку T так, что прямая OT параллельна диагонали BD, то площадь четырёхугольника $AMTK$ будет также равна четвёртой части площади четырёхугольника $ABCD$. Попробуйте доказать этот факт самостоятельно.

В заключение покажем, как с помощью утверждения 6 можно получить ещё одно доказательство теоремы Пифагора.

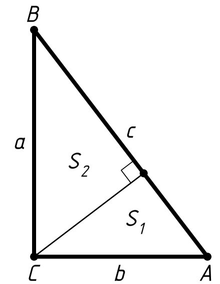

Рис. 22

Доказательство. Пусть прямоугольный треугольник ABC имеет катеты a и b и гипотенузу c. Опустим из вершины прямого угла C высоту. Она разбивает данный треугольник на подобные ему (и друг другу) прямоугольные треугольники. Пусть площади этих треугольников равны S_1 и S_2, а площадь исходного треугольника — S (рис. 22). Коэффициент подобия равен отношению соответствующих сторон. В силу утверждения 6 имеем:

$$\frac{S_1}{S}=\frac{b^2}{c^2},\quad \frac{S_2}{S}=\frac{a^2}{c^2}. \qquad (*)$$

Из равенства $S_1+S_2=S$ получаем: $\dfrac{S_1}{S}+\dfrac{S_2}{S}=1$. Подставляя в это равенство соотношения (*), имеем: $\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{a^2}{c^2}=1$, откуда $a^2+b^2=c^2$, что и требовалось доказать.

Упражнения

38. Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждая из диагоналей делит его площадь пополам.

39. Прямая, параллельная диагонали AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD, пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что прямая EC делит площадь четырёхугольника $ABCD$ пополам.

40. Точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, а точка C_1 — на его стороне AB, причём отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников A_1OC, COA и AOC_1 равны S_1, S_2, S_3 соответственно. Найдите площадь треугольника A_1BC_1.

41. а) На продолжении стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ найдите такую точку O, чтобы площадь $ABCD$ равнялась площади треугольника ABO. Не забудьте указать все возможные решения задачи. б) Как, используя результат пункта (а), превратить любой выпуклый многоугольник в равновеликий ему, но имеющий на одну сторону меньше?

42. В треугольнике ABC на медиане BM взята точка K так, что $BK:KM=1:2$. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

43. Через середину высоты, опущенной на основание равнобедренного треугольника, проведены две прямые, соединяющие её с вершинами основания. Какую часть площади исходного треугольника составляет каждая из шести частей, на которые эти прямые разбивают треугольник?

44. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка M, на отрезке MC — точка P, на стороне BC — точка K (рис. 23). Известно, что $S_{ABCD}=1$, $BM:MD=2:1$, $MP:PC=1:2$, $BK=KC$. Найдите площадь четырёхугольника $BKPM$.

45. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников, прилегающих к основаниям. Найдите площадь трапеции.

46. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами двух противоположных сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведёнными линиями (рис. 24)?

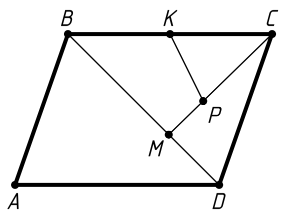

Рис. 23

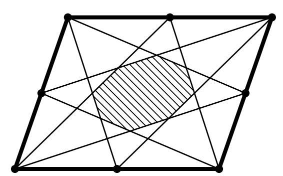

Рис. 24

47. Через середину каждой диагонали выпуклого четырёхугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырёхугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят данный четырёхугольник на четыре равновеликие части.

48. В треугольнике ABC продолжили сторону AB за вершину B отрезком BP таким, что $BP=AB$, сторону AC — за вершину A отрезком AM таким, что $AM=CA$, сторону BC — за вершину C отрезком CK таким, что $CK=BC$. Во сколько раз площадь полученного треугольника PMK больше площади треугольника ABC?

Указание. Соедините точки B и M, P и C, A и K.

49. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые делят треугольник на 6 частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь исходного треугольника.

50. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек M таких, что площади многоугольников $ABCD$ и $ABCM$ равны.

51. Точки M, P и K расположены соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC так, что $3\cdot AM=AB$, $3\cdot BP=BC$, $3\cdot CK=CA$. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми AP, BK и CM, если площадь треугольника ABC равна S.

52. На сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки M, P, K, H соответственно так, что $AM:MB=3:5$, $BP:PC=1:3$, $CK:KD=4:5$, $DH:HA=1:8$. Найдите отношение площади шестиугольника $MBPKDH$ к площади четырёхугольника $ABCD$.

§ 5. Теоремы Чевы и Менелая

Для решения задач часто требуется находить отношения, в которых делятся те или иные отрезки. В этом помогают несколько сильных фактов, к которым относятся теоремы Чевы и Менелая. Прежде чем сформулировать и доказать эти теоремы, рассмотрим лемму (вспомогательное утверждение).

Лемма. Дан произвольный треугольник ABC; точка B_1 лежит на стороне AC, E — произвольная точка отрезка BB_1 (рис. 25). Тогда

$$S_{ABE}:S_{CBE}=AB_1:B_1C.$$

Доказательство. Из свойств площадей следует, что

$$\frac{S_{ABB_1}}{S_{CBB_1}}=\frac{AB_1}{B_1C},\quad \frac{S_{AEB_1}}{S_{CEB_1}}=\frac{AB_1}{B_1C}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{S_{ABE}}{S_{CBE}}=\frac{S_{ABB_1}-S_{AEB_1}}{S_{CBB_1}-S_{CEB_1}}=\frac{AB_1}{B_1C}.$$

что и требовалось доказать.

Примечание. При решении было использовано следующее свойство пропорции: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $b\neq d$, то $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$.

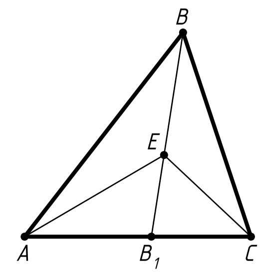

Рис. 25

Замечание. Утверждение леммы будет верным и в случае, когда точка E лежит на продолжении отрезка BB_1 за точку B_1. Подумайте, как изменится доказательство в этом случае.

Таким образом, отношение площадей треугольников ABE и CBE не зависит от выбора точки E и зависит только от выбора точки B_1 на стороне AC.

Т е о р е м а Ч е в ы. Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка B_1 — на стороне AC, а точка C_1 — на стороне AB. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 (называемые также *чевианами*) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке E (рис. 26). Тогда, согласно лемме, имеем:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEB}}=\frac{AC_1}{C_1B},\qquad \frac{S_{AEB}}{S_{AEC}}=\frac{BA_1}{A_1C},\qquad \frac{S_{CEB}}{S_{AEB}}=\frac{CB_1}{B_1A}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

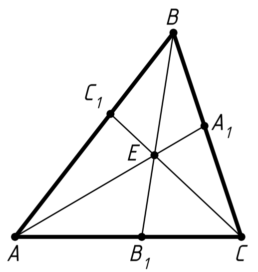

Рис. 26

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{AEC}}{S_{CEB}}\cdot\frac{S_{AEB}}{S_{AEC}}\cdot\frac{S_{CEB}}{S_{AEB}}=1.$$

что и требовалось доказать.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

Докажем, что тогда отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Предположим, это не так: отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке E, а отрезок CC_1 не проходит через точку E. Пусть прямая CE пересекает сторону AB в точке C_2 (рис. 27). Тогда по доказанному выше для чевиан AA_1, BB_1 и CC_2 выполнено условие

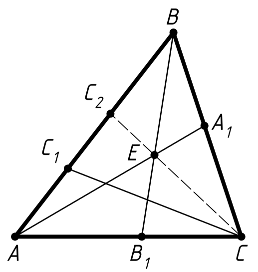

Рис. 27

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $AC_2{:}C_2B=AC_1{:}C_1B$, т. е. точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одинаковом отношении. Это означает, что точки C_1 и C_2

совпадают, что противоречит нашему предположению. Следовательно, оно неверно и отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

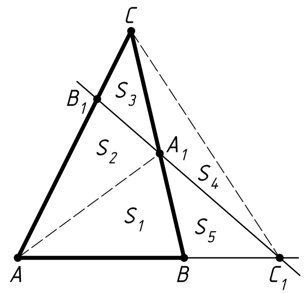

Рис. 28

Т е о р е м а М е н е л а я. Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка B_1 — на стороне AC, а точка C_1 — на продолжении стороны AB. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Проведём отрезки AA_1 и CC_1 и введём обозначения для площадей получившихся треугольников, как показано на рис. 28. Тогда по лемме

$$\frac{S_4}{S_1+S_3}=\frac{CB_1}{B_1A}.$$

Кроме того, из формул площадей треугольников следует, что

$$\frac{S_5}{S_4}=\frac{BA_1}{A_1C},\qquad \frac{S_1+S_2}{S_5}=\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_1+S_5}{S_5}\cdot\frac{S_5}{S_4}\cdot\frac{S_4}{S_1+S_5}=1,$$

что и требовалось доказать.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Доказательство аналогично доказательству второй части теоремы Чевы. Проведите его самостоятельно.

К о м м е н т а р и й к т е о р е м а м Ч е в ы и М е н е л а я. В действительности верны и более общие утверждения, чем содержащиеся в этих двух теоремах. Так, в теореме Чевы точки A_1, B_1 и C_1 не обязаны лежать внутри сторон: утверждение теоремы остаётся верным, если одна точка лежит на стороне, а две другие — вне сторон треугольника. Аналогично, теорема Менелая остаётся верной, если все три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на продолжениях соответствующих сторон. Докажите самостоятельно теоремы Чевы и Менелая для этих случаев расположения точек. Для этого необходимо немного изменить доказательства, приведённые выше.

53. Докажите с помощью теоремы Чевы, что в любом треугольнике а) медианы; б) биссектрисы; в) прямые, содержащие высоты, пересекаются в одной точке.

З а м е ч а н и е. При решении пункта (в) не забудьте отдельно рассмотреть случаи прямоугольного и тупоугольного треугольника!

Рассмотрим пример задачи на применение теоремы Менелая.

54. Точки B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах AC и AB треугольника ABC и делят эти стороны в отношениях $BC_1{:}C_1A=p$ и $CB_1{:}B_1A=q$; E — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Найдите отношение $CE{:}EC_1$.

Р е ш е н и е. Применим теорему Менелая для треугольника ACC_1 и точек B_1, E и B (рис. 29):

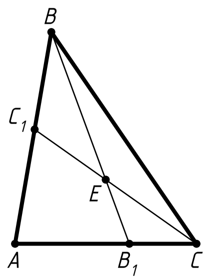

Рис. 29

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CE}{EC_1}\cdot\frac{C_1B}{BA}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{CE}{EC_1}=\frac{B_1C}{AB_1}\cdot\frac{BA}{C_1B}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{BA}{C_1B}=\frac{AC_1+C_1B}{C_1B}=1+\frac{AC_1}{C_1B}=1+\frac{1}{p}=\frac{p+1}{p}.$$

Кроме того, $B_1C{:}AB_1=q$; исходя из этого, получаем искомое отношение:

$$\frac{CE}{EC_1}=\frac{q(p+1)}{p}.$$

О т в е т: $CE{:}EC_1=\frac{q(p+1)}{p}$.

Сформулируем аналогичную задачу. Решите её самостоятельно.

55. Точки B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах AC и AB треугольника ABC; E — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Найдите отношение $AC_1{:}C_1B$, если $B_1E{:}EP=p$ и $CB_1{:}B_1A=q$.

Упражнения

56. Внутри треугольника ABC лежит точка M. Докажите, что площади треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда точка M находится на медиане BK.

57. Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите отношение, в котором

а) биссектриса l_b делит биссектрису l_a;

б) высота h_b делит высоту h_a (в этом пункте треугольник предполагается остроугольным).

58. Дан треугольник ABC, в котором BM — медиана. Точка P лежит на стороне AB, точка Q — на стороне BC, причём $AP{:}PB=2{:}5$, $BQ{:}QC=6$. Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R. Найдите отношение $BR{:}RM$.

59. В треугольнике ABC угол C — прямой, $BC=3$, $AC=4$, CD — биссектриса, AM — медиана. Найдите площадь треугольника CEM, где E — точка пересечения отрезков CD и AM.

60. Докажите, что если внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ найдётся такая точка O, что отрезки OA, OB, OC и OD делят его на четыре равновеликие части, то хотя бы одна из диагоналей этого четырёхугольника делит другую диагональ пополам.

61. Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC, точка B_1 — на стороне AC, а точка C_1 — на стороне AB. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Обозначим площади треугольников AOC_1, C_1OB, BOA_1, A_1OC, COB_1, B_1OA через S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 соответственно. Докажите, что

а) $S_1S_3S_5=S_2S_4S_6$;

б) $\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CO}{OC_1}$, $\quad\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AO}{OA_1}$, $\quad\frac{BC_1}{C_1A}+\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BO}{OB_1}$

(т е о р е м а В а н - О б е л я);

в) $\frac{A_1O}{AA_1}+\frac{B_1O}{BB_1}+\frac{C_1O}{CC_1}=1$; $\qquad$ г) $\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=2$.

На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1, A_1, B_1 — точки касания вписанной окружности. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

62. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены соответственно точки C_1, A_1, B_1 — точки касания вневписанных окружностей. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

У к а з а н и е. Докажите и используйте тот факт, что каждая точка касания вневписанной окружности делит периметр треугольника пополам. Т. е., например, $AB+BA_1=AC+CA_1$.

63. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка A_1, отличная от середины. Возьмём любую точку Z на отрезке AA_1. Пусть B_1 — точка пересечения луча BZ со стороной AC; C_1 — точка пересечения луча CZ со стороной AB. Докажите, что все прямые B_1C_1, полученные таким образом (для всевозможных точек Z), пересекаются в одной точке.

64. (Т е о р е м а Д е з а р г а.) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами расположены так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Точки M, K, P — точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 соответственно. Докажите, что M, K, P лежат на одной прямой.

Замечание. В этой задаче возникает большое количество различных случаев в зависимости от взаимного расположения перечисленных в условии точек. В частности, некоторые из этих точек могут совпадать. Постарайтесь рассмотреть все возможные варианты!

§ 6. Геометрические неравенства

Задачи на геометрические неравенства (т. е. задачи, в которых требуется сравнить какие-либо величины или доказать неравенство) достаточно редки, но, как правило, решение их вызывает большое количество трудностей. Элементы таких задач встречаются на вступительных экзаменах в сильные математические вузы — например, в ситуациях, когда для правильного построения чертежа к геометрической задаче необходимо сравнить какие-либо величины.

Простейшими из задач на геометрические неравенства можно считать те, которые решаются при помощи неравенства треугольника. Основные приёмы решения таких задач были разобраны в брошюре «Планиметрия». Кроме неравенства треугольника, часто применяется также теорема о соотношении сторон и углов в треугольнике.

Теорема. В любом треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол; обратно, в любом треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона.

Рассмотрим пример применения этой теоремы.

65. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает сторону AB в точке D и продолжение стороны AC в точке E. Докажите, что $AE>AD$.

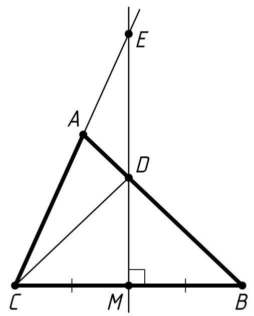

Рис. 30

Решение. Обозначим середину стороны BC через M. Треугольник CBD — равнобедренный (почему?). Следовательно, DM является биссектрисой этого треугольника: $\angle CDM = \angle MDB = \angle ADE$ (рис. 30). Угол CDM — внешний для треугольника CED, поэтому $\angle CDM = \angle AED + \angle ACD$. Следовательно, $\angle ADE = \angle CDM > \angle AED$, а поскольку напротив большего угла треугольника ADE лежит большая сторона, то $AE>AD$, что и требовалось доказать.

66. На сторонах угла A взяты точки B и C. Через середину K отрезка BC проведена прямая, пересекающая стороны угла AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что площадь треугольника ADE больше площади треугольника ABC.

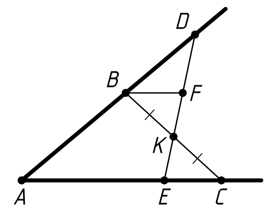

Рис. 31

Решение. Проведём через точку B прямую, параллельную AC. Пусть она пересекает прямую DE в точке F (рис. 31). Точка F обязательно будет лежать внутри отрезка KD (почему?). Заметим, что треугольники BKF и CKE равны по стороне ($BK=CK$) и двум прилежащим углам (углы при вершине K равны как вертикальные, а $\angle KBF = \angle KCE$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей). Из равенства треугольников следует и равенство их площадей; тогда $S_{BKD}=S_{BKF}+S_{BFD}>S_{BKF}=S_{CKE}$, и

$$S_{ADE}=S_{ABKE}+S_{BKD}>S_{ABKE}+S_{CKE}=S_{ABC},$$

что и требовалось доказать.

67. Пусть a, b, c, d — длины последовательных сторон выпуклого четырёхугольника, S — его площадь. Докажите, что $S\leqslant\frac{1}{2}(ab+cd)$.

Решение. Обозначим данный четырёхугольник через $ABCD$ так, чтобы $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$. Тогда:

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle B+\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin\angle D\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot BC+\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}(ab+cd),$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

68. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD и прямым углом A сравните периметры треугольников ABC и CDB.

69. Через данную внутри угла A точку K проведите при помощи циркуля и линейки прямую, пересекающую стороны угла в точках B и C так, чтобы площадь треугольника ABC была наименьшей.

Замечание. Стандартные построения, известные из школьного курса (построение параллельных и перпендикулярных прямых, откладывание равных отрезков и т. п.) считаются известными; эти построения можно использовать, не описывая их выполнение подробно.

70. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD на диагонали AC берётся точка P и через неё проводится прямая MN, параллельная основанию AB (точка M лежит на стороне AD, N — на стороне BC). Как нужно выбрать точку P, чтобы сумма площадей треугольников APM и CPN была наименьшей?

Указание. Докажите, что если P — точка пересечения диагоналей трапеции, то $MP=PN$.

71. Мальчик и девочка делят треугольный торт следующим образом. Мальчик выбирает произвольную точку внутри торта, а девочка проводит через эту точку разрез и забирает больший из двух получившихся кусков. Каждый из ребят хочет получить по возможности бо́льшую часть торта. Докажите, что мальчику выгоднее всего указывать точку пересечения медиан треугольника.

72. а) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до его сторон заключена между длинами наибольшей и наименьшей высот этого треугольника. б) В треугольнике ABC выполняется следующее соотношение: $AB>BC>AC$. Найдите внутри треугольника или на его границе точку, сумма расстояний от которой до прямых AB, AC и BC минимальна.

73. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины сторон произвольного выпуклого а) пятиугольника, б) шестиугольника, в) n-угольника ($n>6$), то площадь полученного многоугольника составит более половины площади исходного.

74. Пусть a, b, c, d — длины последовательных сторон выпуклого четырёхугольника, S — его площадь. Докажите, что $S\leqslant\frac{1}{2}(ac+bd)$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда четырёхугольник является вписанным, а его диагонали перпендикулярны.

75. Периметр четырёхугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

Оглавление