МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
П37

П37 **Планиметрия** : методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / авторы-составители Е. Ю. Иванова, Д. А. Калинин. — М. : изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 32 с. : ил.

В брошюре рассмотрены такие темы планиметрии, как неравенство треугольника, сумма углов многоугольника, геометрические места точек, вписанные углы и многоугольники, теоремы синусов и косинусов. Приведены примеры решения задач.

ББК 22.1

Планиметрия.

Авторы-составители Е. Ю. Иванова, Д. А. Калинин.

Редактор А. В. Деревянкин. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

Предисловие

Разработка посвящена избранным вопросам планиметрии. В первом параграфе разбираются задачи, связанные с неравенством треугольника, которому в школьном курсе геометрии уделяется недостаточное внимание. Во втором параграфе разбираются такие вопросы, как сумма углов многоугольника, геометрические места точек, касательные к окружности и пр. Третий параграф посвящён вписанным углам и многоугольникам, четвертый — решению треугольников при помощи теорем синусов и косинусов.

Авторы постарались подобрать задачи так, чтобы их методы решения были наиболее типичными. Выводы, полученные при решении многих из разобранных задач, зачастую являются «ключом» к решению других, более сложных геометрических задач. Хотелось бы также обратить ваше внимание на форму изложения решения, так как правильное оформление часто играет важную роль при решении именно геометрических задач.

В тексте параграфов вам будут встречаться упражнения и задачи. Некоторые из них снабжены решениями, которые вам следует внимательно разобрать. Над теми задачами, решения которых отсутствуют, подумайте самостоятельно (если вы будете использовать эти задачи при выполнении работы, то не забудьте привести их решение!). Такая подготовка позволит вам более успешно выполнить предлагаемое задание.

Если вы желаете повысить уровень своих знаний по геометрии, то советуем обратиться к следующим задачникам и пособиям.

- Прасолов В. В. «Задачи по планиметрии»: в 2 частях. М.: Наука, 1995. Главы 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12.
- Шарыгин И. Ф. «Геометрия. Планиметрия. 9—11 кл.»: от учебной задачи к творческой. Пособие для учащихся. М.: Дрофа, 1997 (из серии «Задачники „Дрофы“»).
- Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, С. А. Шестаков, И. И. Юдина. «Геометрия. Дополнительные главы к учебнику»: учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М.: Просвещение, 1996. 8 класс — главы 1, 4; 9 класс — глава 2.

§ 1. Неравенство треугольника

В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Это простое утверждение принято называть *неравенством треугольника*. Оно даёт ответ на вопрос: всегда ли можно построить треугольник, сторонами которого являются заданные отрезки a, b и c? Оказывается, такой треугольник нельзя построить, если хотя бы один из этих отрезков больше или равен сумме двух других. Чтобы треугольник с заданными сторонами существовал, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены три неравенства: $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$. Однако не обязательно проверять верность всех трёх неравенств. Достаточно проверить только одно, остальные будут выполнены автоматически.

1. Объясните, почему достаточно проверить, чтобы самая большая сторона треугольника была меньше суммы двух других сторон.

П р и м е ч а н и е. Обращаем ваше внимание на то, что отрезок — это геометрическая фигура, в то время как длина отрезка — это число. Поэтому сравнивать и производить арифметические действия можно не с самими отрезками, а только с их длинами. Однако на практике слово «длина» часто опускается, что не приводит к недоразумениям: так, например, вместо «длина отрезка AB больше длины отрезка CD» пишут просто «отрезок AB больше отрезка CD». В этой брошюре мы тоже, как правило, будем для сокращения записи опускать в подобных случаях слово «длина».

Неравенство треугольника можно применять для ответа на вопрос, существует ли треугольник с заданными сторонами.

2. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если у него одна сторона меньше другой на 4, а периметр равен 16.

Р е ш е н и е. Пусть основание треугольника равно a, а боковая сторона равна b. Так как неизвестно, какая именно из сторон меньше, то рассмотрим два случая.

1) $a=b+4$. Получим уравнение $3b+4=16$. Отсюда $b=4$, $a=8$. Надо проверить, существует ли такой треугольник. Для этого необходимо выполнение неравенства треугольника: $8<4+4$ — неверно. Значит, такого треугольника не существует.

2) $b=a+4$. Получим уравнение $3a+8=16$. Отсюда $a=8/3$, $b=4+8/3=20/3$. Проверим неравенство треугольника: $20/3<20/3+8/3$ — верно. Этого достаточно для существования треугольника.

О т в е т: $\frac{8}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{20}{3}$.

Иногда для решения задачи нужно применить неравенство треугольника несколько раз (для разных треугольников).

3. Докажите, что в любом пятиугольнике сумма диагоналей меньше удвоенного периметра.

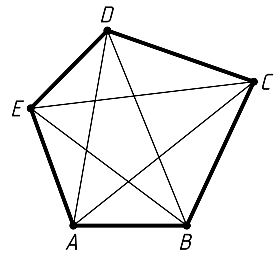

Рис. 1

Р е ш е н и е. Пусть $ABCDE$ — данный пятиугольник (рис. 1). Тогда имеем пять неравенств:

$$\begin{aligned} AC&<AB+BC,\\ BD&<BC+CD,\\ CE&<CD+DE,\\ DA&<DE+EA,\\ EB&<EA+AB. \end{aligned}$$

Сложив все пять неравенств, получим требуемое утверждение.

Иногда при решении задач бывает необходимо применить дополнительные построения.

4. Докажите, что если BB_1 — медиана треугольника ABC, то

$$BB_1<\frac{AB+BC}{2}.$$

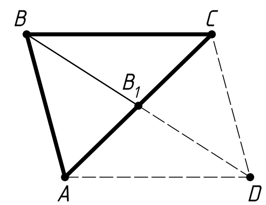

Рис. 2

Р е ш е н и е. Построим на луче BB_1 за точкой B_1 точку D такую, что $BB_1=B_1D$ (рис. 2). Треугольники ABB_1 и CDB_1 равны по двум сторонам и углу между ними ($BB_1=DB_1$ по построению; $AB_1=CB_1$, поскольку BB_1 — медиана; углы при вершине B_1 равны как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $AB=CD$ (отметим, что аналогично можно доказать равенство $AD=BC$, из чего следует, что $ABCD$ — параллелограмм, но для данного решения это несущественно). Применим неравенство треугольника к $\triangle BCD$: $BD<BC+CD$. С учётом равенств $BD=2\cdot BB_1$ и $AB=CD$ получим:

$$2\cdot BB_1<AB+BC,$$

откуда непосредственно следует утверждение задачи.

Сравнивать элементы треугольника позволяет другой известный факт, который связывает стороны с углами треугольника.

Т е о р е м а. В любом треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.

Прямым следствием этой теоремы служит такой полезный факт: *в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.*

5. Докажите это утверждение, опираясь на сформулированную теорему.

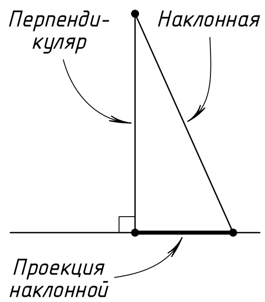

Рис. 3

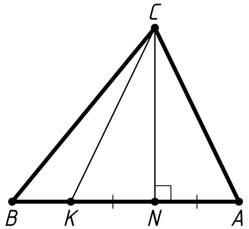

Рис. 4

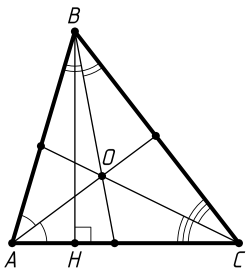

Рис. 5

Само утверждение «в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов» можно переформулировать так: «перпендикуляр к прямой меньше любой наклонной» (рис. 3), или: «кратчайшим отрезком, соединяющим точку с прямой, является перпендикуляр, опущенный из точки на эту прямую».

6. Докажите, что если две наклонных к одной прямой проведены из одной и той же точки, то большей наклонной соответствует бо́льшая проекция.

Все эти соображения служат маленькими «кирпичиками» при решении более сложных задач.

7. В треугольнике ABC со сторонами $BC=a$ и $AC=b$ высота CN делит сторону AB на части $BN=x$ и $AN=y$. Докажите, что если $a>b$, то $a-x<b-y$.

Р е ш е н и е. Отложим на луче NB отрезок NK, равный отрезку NA. Проекция BN наклонной BC больше проекции AN наклонной AC, так как $BC>AC$, поэтому точка K окажется внутри отрезка BN. Прямоугольные треугольники CNK и CNA равны по двум катетам, откуда $CK=CA$ (рис. 4). Рассмотрим треугольник BCK. У него $BC=a$, $CK=b$, $BK=x-y$. Согласно неравенству треугольника имеет место неравенство

$$b+(x-y)>a$$

откуда $a-x<b-y$, что и требовалось доказать.

8. В треугольнике длины всех биссектрис не превосходят 1. Верно ли, что его площадь меньше 1?

З а м е ч а н и е. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S=0{,}5\cdot a\cdot h_a$, где a — сторона треугольника, а h_a — высота, которая опущена на эту сторону.

Р е ш е н и е. В любом треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке O внутри треугольника (рис. 5). Проведём высоту BH. Площадь треугольника вычисляется по формуле

$$S_{\triangle ABC}=\frac{BH\cdot AC}{2}.$$

При этом BH не превосходит по длине биссектрису угла B (перпендикуляр короче наклонной) и, следовательно, $BH\leqslant 1$ (в каком случае достигается равенство?). Из неравенства треугольника следует также, что $AC<AO+OC<1+1=2$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{BH\cdot AC}{2}<\frac{1\cdot 2}{2}=1.$$

О т в е т: верно.

Неравенство треугольника можно использовать также для выяснения того, лежат ли три данные точки на одной прямой или нет. Если, например, $AB\leqslant BC\leqslant AC$ и $AC=AB+BC$, то точки A, B и C лежат на одной прямой (при этом точка B лежит между A и C); если же $AC<AB+BC$, то точки не лежат на одной прямой.

С л е д с т в и е и з н е р а в е н с т в а т р е у г о л ь н и к а. Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

Подумайте, почему ни для каких точек A, B и C не может быть выполнено соотношение $AC>AB+BC$.

Также следствием неравенства треугольника является следующее утверждение.

Н е р а в е н с т в о м н о г о у г о л ь н и к а. В любом многоугольнике длина любой стороны меньше суммы длин остальных сторон.

9. Докажите неравенство многоугольника и убедитесь, что оно выполняется и для любой замкнутой ломаной (возможно, самопересекающейся).

Неравенство многоугольника — частный случай более общего утверждения: *длина кратчайшего пути между двумя точками плоскости равна длине отрезка, соединяющего эти точки.*

К применению неравенства треугольника сводятся многие задачи, в которых надо найти какое-то наименьшее расстояние.

10. Два населённых пункта A и B расположены по одну сторону от прямой дороги. Где на дороге следует расположить автобусную остановку O, чтобы сумма расстояний $AO+OB$ была наименьшей (рис. 6)?

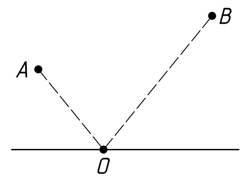

Рис. 6

Р е ш е н и е. Заменим точку B другой точкой B_1 так, чтобы для любой точки O_1 на данной прямой расстояния AO_1+O_1B и $AO_1+O_1B_1$ были равны. В качестве такой точки подойдёт точка, симметричная точке B относительно данной прямой (рис. 7).

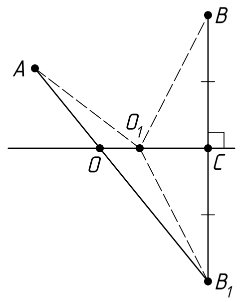

Рис. 7

Напомним определение симметричной точки.

Определение. Точки B и B_1 симметричны относительно прямой l, если прямая l служит серединным перпендикуляром к отрезку BB_1 (если точка B лежит на прямой, то она симметрична самой себе).

Действительно, такая точка подойдёт: для любой точки O_1 на данной прямой (рис. 7) выполняется равенство $BO_1=B_1O_1$, так как треугольники BO_1C и B_1O_1C равны (докажите их равенство самостоятельно). Поэтому достаточно найти такую точку O на прямой, чтобы сумма $AO+OB_1$ была наименьшей; из неравенства треугольника следует, что для этого точки A, O, B_1 должны лежать на одной прямой. Отсюда вытекает следующее построение:

1) строим точку B_1, симметричную точке B относительно дороги;
2) проводим отрезок AB_1;
3) точка O — пересечение отрезка AB_1 и данной прямой — искомая.

Следствием из решения задачи **10** служит такое свойство точки O (докажите это свойство самостоятельно): *лучи OA и OB образуют равные углы с данной прямой.*

Упражнения

11. Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если длины двух других сторон равны 5 см и 2 см.

12. Докажите, что для произвольных трёх точек расстояние между любыми двумя из этих точек не меньше разности расстояний от них до третьей точки.

13. В целочисленном треугольнике (т. е. треугольнике, длины сторон которого являются целыми числами) одна из сторон равна 3, а периметр равен 18. Найдите две другие стороны треугольника.

14. Каковы стороны равнобедренного треугольника, если одна из его сторон меньше другой в три раза, а периметр равен 35 см?

15. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если одна из его сторон равна 4 см, а боковая сторона и основание отличаются на 5 см.

16. Докажите, что в произвольном выпуклом четырёхугольнике сумма диагоналей меньше периметра этого четырёхугольника и больше его полупериметра.

17. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике сумма диагоналей больше периметра.

18. Докажите, что в любом треугольнике сумма длин медиан а) меньше периметра треугольника; б) больше 3/4 периметра треугольника.

19. а) Петя утверждает, что из любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник. Прав ли он?

б) Петя уточнил свои слова: «Если самый маленький из 10 отрезков более 1 см, а самый большой менее 55 см, то из них найдутся три отрезка, из которых можно составить треугольник». Прав ли он теперь?

20. Может ли внутри данного треугольника лежать треугольник с бóльшим периметром, чем данный?

21. В произвольном выпуклом четырёхугольнике найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырёхугольника минимальна.

22. Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ средняя линия, соединяющая середины противоположных сторон AB и CD, равна полусумме сторон BC и AD, то данный четырёхугольник является параллелограммом или трапецией.

23. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) отметили точки M, N, K (точка N — ближайшая к стороне AC) так, что $MN\|BC$, $NK\|AB$ (рис. 8). Докажите, что $AM+KC>MN+NK$.

24. В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

25. В треугольнике длина каждой из медиан меньше 1. Верно ли, что площадь этого треугольника меньше 2/3?

26. В треугольнике длина каждой из высот меньше 1. Верно ли, что площадь этого треугольника меньше 1?

27. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, а из вершины B проведён перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

28. Дан острый угол и точка A внутри его. На сторонах угла постройте точки B и C (по одной на каждой стороне) такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

29. Две точки A и B расположены по одну сторону от прямой; расстояния от A и B до прямой неравны. Постройте на прямой такую точку O, чтобы абсолютная разность расстояний $|AO-OB|$ была наибольшей.

30. а) Даны три отрезка длин 1, 2, 3. Отрезок длины 3 как-то разбили на пять других.

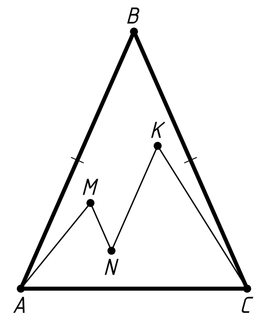

Рис. 8

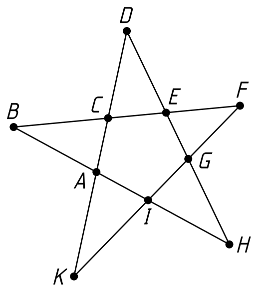

Рис. 9

Докажите, что среди получившихся семи отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

б) Даны три отрезка длин 1, 2, 3. Отрезок длины 3 как-то разбили на 100 других. Докажите, что среди получившихся 102 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

31. В результате измерения четырёх сторон и одной диагонали некоторого четырёхугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна измеренная диагональ?

32. Докажите, что если ABC — равнобедренный треугольник, в котором угол A, лежащий против основания, равен 20°, то $AB < 3 \cdot BC$.

33. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M на плоскости выполняется неравенство $AM < BM + CM + DM$.

34. Докажите, что звезду (рис. 9) нельзя нарисовать так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $AB < BC$, $CD < DE$, $EF < FG$, $GH < HI$, $IK < KA$.

§ 2. Некоторые теоремы и задачи планиметрии

Введение. В этом параграфе мы вспомним некоторые теоремы школьного курса и остановимся на свойствах геометрических фигур, которые бывают очень полезны при решении задач.

Надо помнить, что теоремы, которые формулируются в школьном учебнике, — не только основа для решения задач. Их доказательства — примеры рассуждений, которые можно использовать при построении своих решений. Поэтому важно знать не только формулировки теорем, но и доказательства. Желательно, чтобы вы вспомнили доказательства всех тех теорем, которые приведены в этом параграфе.

Сумма углов треугольника. Сформулируем несколько теорем, которые должны быть вам хорошо известны.

Теорема о сумме углов треугольника. Сумма углов треугольника равна 180°.

Теорема о внешнем угле треугольника. Внешний угол треугольника равен сумма двух углов треугольника, не смежных с ним.

Теорема о сумме углов многоугольника. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Следствие из теоремы о сумме углов многоугольника. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

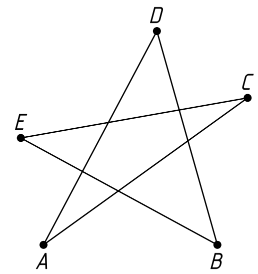

Рис. 10

Интересные факты связаны с суммой углов так называемых «звёзд».

35. Найдите сумму углов A, B, C, D, E пятиугольной звезды, изображённой на рис. 10.

Первое решение. По теореме о внешнем угле треугольника, применённой к $\triangle AFC$, имеем (рис. 11): $\angle EFG = \angle A + \angle C$. Аналогично для треугольника BDG имеем: $\angle EGF = \angle B + \angle D$. Сумма углов треугольника EFG равна 180°, поэтому

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle E + \angle EFG + \angle EGF = 180^\circ.$$

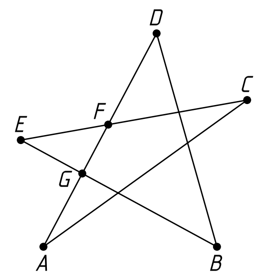

Рис. 11

Второе решение. Рассмотрим сумму углов треугольников ABD, BCE, CDA, DEB и EAC (рис. 12). С одной стороны, она равна $5\cdot 180^\circ$, с другой — в неё входит сумма углов пятиугольника $ABCDE$ ($3\cdot 180^\circ$) и удвоенная сумма углов данной звезды (убедитесь в этом!). Значит, сумма углов звезды равна $(5\cdot 180^\circ - 3\cdot 180^\circ)/2 = 180^\circ$.

Ответ: 180°.

Первое решение проще, чем второе, однако второе решение несложно обобщается на звёзды с бо́льшим числом углов (задача **45**).

Заметим, что если все уже привыкли к тому, что сумма углов любого треугольника равна 180°, то факт, что у любой пятиугольной звезды (независимо от расположения вершин) сумма углов постоянна, вполне может показаться удивительным.

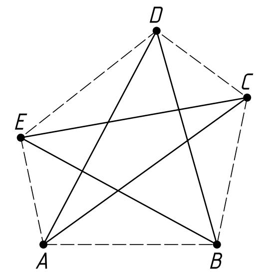

Рис. 12

Геометрические места точек. *Геометрическое место точек* (сокращённо ГМТ), обладающих некоторым свойством, — это фигура, состоящая из всех точек, обладающих этим свойством.

Приведём примеры геометрических мест точек.

• Пусть дана точка O и положительное число r. Геометрическим местом точек, находящихся на расстоянии r от точки O, является окружность радиуса r с центром в точке O (по определению окружности). Значит, такая окружность — искомое ГМТ.

• Пусть дана точка O и положительное число r. Рассмотрим геометрическое место точек, находящихся на расстоянии не более r от точки O. Таким свойством обладают уже не только точки окружности, но и все точки внутри её. Значит, искомое ГМТ — круг радиуса r с центром в точке O.

36. Дана точка O и положительные числа r и R ($r<R$). Опишите геометрическое место точек, удалённых от точки O на расстояние не меньшее чем r, но не превышающее R.

• Даны точки A и B. Геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Доказательство. Необходимо показать, что множество точек серединного перпендикуляра совпадает с множеством точек, равноудалённых от A и B. Для этого необходимо показать, что: 1) любая точка, равноудалённая от точек A и B, принадлежит серединному перпендикуляру; 2) любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от точек A и B.

1) Пусть M — произвольная точка плоскости, для которой $AM=BM$. Если она лежит на прямой AB, то совпадает с точкой O — серединой отрезка AB. Если она не лежит на прямой AB, то треугольник ABM — равнобедренный (рис. 13). В нём медиана MO является и высотой. Значит, MO — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

2) Пусть M — произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB. Если M совпадает с точкой O, то $AM=MB$. Если же нет, тогда треугольник AMB равнобедренный (рис. 13), так как в нём высота MO является медианой. Значит, $AM=MB$.

Утверждение доказано.

Приведённое доказательство построено по следующей схеме. Вначале описаны два множества точек: одно (X) — свойством точек, другое (Y) — геометрически. Нужно доказать, что множества X и Y равны. Для этого необходимо показать, что: 1) любая точка из множества X принадлежит множеству Y; 2) любая точка из множества Y принадлежит множеству X.

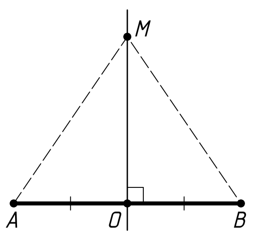

Рис. 13

• Геометрическое место точек, находящихся внутри угла и равноудалённых от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

37. Докажите это самостоятельно, опираясь на указанную схему.

Доказательства некоторых важных фактов планиметрии можно свести к рассмотрению геометрических мест точек.

Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром окружности, описанной около треугольника.

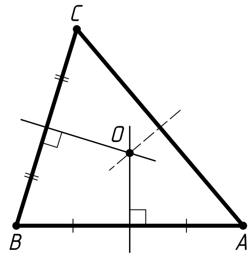

Рис. 14

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC которого пересекаются в точке O (рис. 14). Докажем, что точка O принадлежит серединному перпендикуляру к стороне CA.

Точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB, значит, $AO=BO$. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, значит, $BO=CO$.

Из полученных равенств следует, что $AO=BO=CO$. Раз $AO=CO$, то, следовательно, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CA. Из равенства $AO=BO=CO$ следует также, что точки A, B и C равноудалены от точки O, а, следовательно, лежат на одной окружности с центром в точке O.

Теорема доказана.

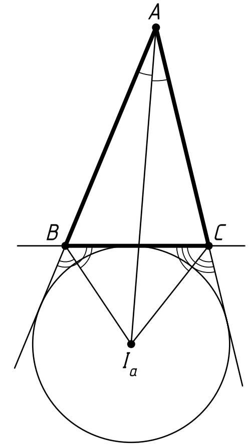

Рис. 15

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром окружности, вписанной в треугольник.

38. Докажите эту теорему самостоятельно.

Несложно также показать, что в любой треугольник можно вписать только одну окружность.

Из утверждения теоремы можно сделать вывод, что точка I — центр вписанной окружности — равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника. Но такая точка не одна; имеет место следующий факт.

Теорема. В любом треугольнике ABC биссектриса угла A и биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в одной точке I_a. Эта точка является центром вневписанной окружности треугольника, которая касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC (рис. 15).

Таким образом, мы построили для произвольного треугольника пять окружностей: описанную, вписанную и три (по одной для каждой стороны) вневписанные. Эти окружности обладают большим числом красивых свойств, некоторые из которых доказываются достаточно сложно.

Касательные к окружности. В задачах, где рассматриваются касательные к окружности, очень часто бывает полезна теорема об отрезках касательных.

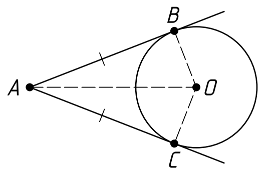

Рис. 16

Т е о р е м а. Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны. Иначе говоря, если из точки A провели касательные AB и AC к окружности ω (точки B и C лежат на окружности ω), то $AB=AC$ (рис. 16).

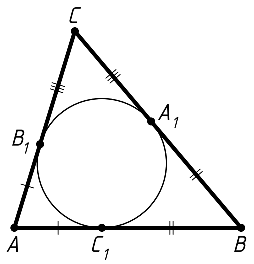

Рис. 17

С л е д с т в и е. Если в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности и сторон BC, CA и AB соответственно (рис. 17), то имеют место равенства $AB_1=AC_1$, $BA_1=BC_1$, $CA_1=CB_1$.

39. Докажите теорему и её следствие самостоятельно.

Как следует из теоремы о биссектрисах треугольника, для любого треугольника существует единственная вписанная окружность. Для четырёхугольников дело обстоит иначе. Нетрудно построить пример четырёхугольника, для которого не существует окружности, касающейся всех его сторон (рис. 18). Опираясь на утверждение об отрезках касательных, можно доказать следующую теорему.

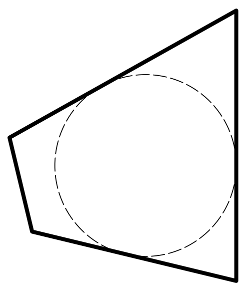
Рис. 18

Т е о р е м а. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$.

П р и м е ч а н и е. Если формулировка теоремы содержит фразу «тогда и только тогда», то необходимо доказать прямое и обратное утверждение:

1) если выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, то $AB+CD=BC+AD$;

2) если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняется равенство $AB+CD=BC+AD$, то данный четырёхугольник описан около окружности (т. е. существует окружность, касающаяся всех его сторон).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть K, L, M, N — точки касания окружности и сторон четырёхугольника (рис. 19). Из теоремы об отрезках касательных следует, что $AK=AN$, $BK=BL$, $CM=CL$, $DM=DN$.

Сложив все эти равенства, получим:

$$AB+CD=(AK+BK)+(CM+DM)=$$
$$=(AN+DN)+(BL+CL)=BC+AD.$$

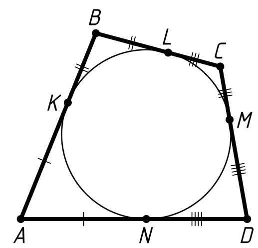

Рис. 19

2) Доказательство второй части проведём методом от противного, используя уже доказанную первую часть.

Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB+CD=BC+AD$. Построим окружность, касающуюся лучей AB, DC и стороны AD (легко показать, что такая окружность существует; её центр расположен в точке пересечения биссектрис углов A и D). Предположим, что она не касается стороны BC (рис. 20). Проведём прямую, касающуюся окружности, так, чтобы она была параллельна прямой BC и располагалась с другой стороны от центра окружности относительно отрезка AD. Пусть она пересекает прямые AB и CD в точках B_1 и C_1 соответственно.

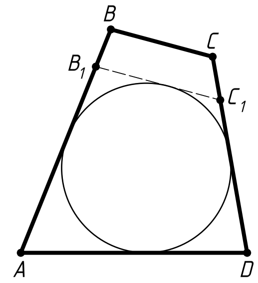

Рис. 20

Заметим, что либо обе точки B_1 и C_1 лежат на сторонах четырёхугольника, либо обе на продолжениях этих сторон. Рассмотрим первый из этих случаев (он показан на рис. 20). Второй случай полностью аналогичен.

Четырёхугольник AB_1C_1D описан около окружности, поэтому (по первой части)

$$AB_1+C_1D=B_1C_1+AD.$$

Тогда, вычитая это равенство из данного в условии, получаем:

$$BB_1+C_1C=BC-B_1C_1$$

или

$$BC=BB_1+C_1C+B_1C_1,$$

что противоречит неравенству многоугольника (см. § 1).

Теорема доказана.

Интересен общий вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять длины сторон произвольного четырёхугольника, чтобы существовала окружность, касающаяся сторон четырёхугольника или их продолжений. Некоторые частные случаи этой задачи сформулированы после параграфа (задача **51**). Их рассмотрение аналогично доказательству теоремы об описанном четырёхугольнике.

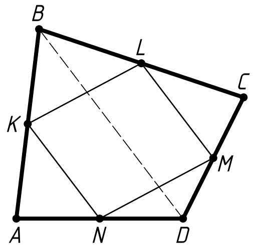

Рис. 21

Средняя линия треугольника.

Т е о р е м а   о   с р е д н е й   л и н и и   т р е у г о л ь н и к а. Если в треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно, то прямые BC и B_1C_1 параллельны и $B_1C_1=BC/2$.

Эта теорема есть в любом школьном учебнике. При решении задач бывает очень полезным факт, вытекающий из этой теоремы и сформулированный ниже в качестве задачи.

40. Т е о р е м а   В а р и н ь о н а. Докажите, что в любом четырёхугольнике середины сторон являются вершинами параллелограмма (рис. 21).

З а м е ч а н и е. Обратите внимание, что при доказательстве нигде не используется факт выпуклости четырёхугольника. Это значит, что утверждение задачи распространяется и на *невыпуклые четырёхугольники*.

К использованию теоремы о средней линии треугольника сводится доказательство теоремы о средней линии трапеции.

Т е о р е м а   о   с р е д н е й   л и н и и   т р а п е ц и и. Если в трапеции $ABCD$ точки E и F — середины боковых сторон AB и CD соответственно, то прямая EF параллельна основаниям трапеции и $EF=(BC+AD)/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть прямая BF пересекает прямую AD в точке G (рис. 22). Тогда треугольники BCF и GDF равны по стороне и прилежащим к ней углам: $CF=DF$; $\angle BFC=\angle CFD$ (как вертикальные); $\angle BCF=\angle GDF$ (накрест лежащие при параллельных прямых BC и GD и секущей CD).

Из равенства треугольников следует, что $BC=DG$, $BF=GF$. Таким образом, отрезок EF — средняя линия треугольника ABG, откуда следует, что он параллелен AD (и, следовательно, BC) и

$$EF=\frac{AG}{2}=\frac{DG+AD}{2}=\frac{BC+AD}{2}.$$

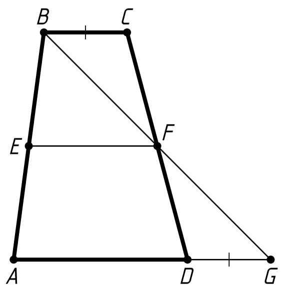

Рис. 22

Теорема доказана.

Из данного доказательства следует формула для площади трапеции. Действительно, из равенства треугольников BCF и GDF следует равенство площадей трапеции и треугольника ABG. Таким образом, площадь трапеции равна произведению высоты трапеции на половину длины отрезка AG (которая равна средней линии трапеции).

Т е о р е м а. Площадь трапеции равна произведению её высоты и средней линии, или, в эквивалентной формулировке, площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.

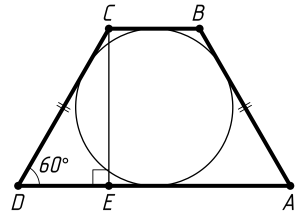

Рис. 23

41. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Острый угол трапеции равен 60°. Найдите длину боковой стороны.

Р е ш е н и е. Воспользуемся свойством сторон описанного четырёхугольника: $AD+BC=AB+CD$, откуда

$$AD+BC=2\cdot CD$$

(так как трапеция равнобедренная). Пусть CE — высота, опущенная на основание AD (рис. 23). В прямоугольном треугольнике CDE угол CDE равен 60°, поэтому $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$. Воспользуемся формулой площади трапеции:

$$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot CE=\frac{AD+BC}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot CD}{2}=\frac{2\cdot CD}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot CD}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot CD^2}{2},$$

откуда $CD=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,S}{3}}$.

О т в е т: $\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,S}{3}}$.

У п р а ж н е н и я

42. Проверьте, можно ли в качестве признаков равенства треугольников взять какие-либо из следующих формулировок:

а) если две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны;

б) если сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны;

в) если три угла одного треугольника равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

43. Докажите, что в любом треугольнике хотя бы один из углов не превышает 60°, а хотя бы один угол не менее 60°.

44. Пересекаясь в одной точке, биссектрисы треугольника делят 360° на шесть углов по 60°. Докажите, что треугольник является равносторонним.

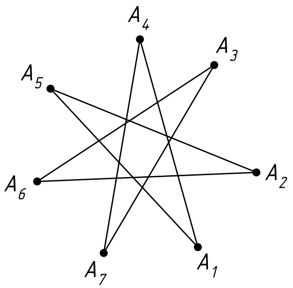

Рис. 24

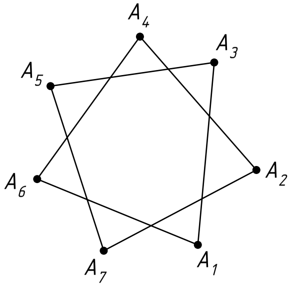

Рис. 25

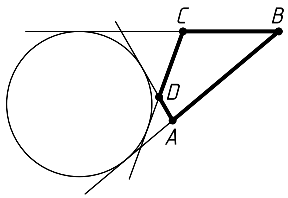

Рис. 26

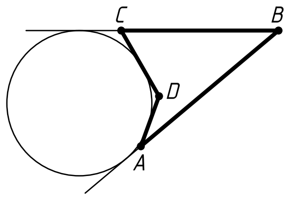

Рис. 27

45. Найдите сумму углов при вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_7$ звезды, изображённой а) на рис. 24; б) на рис. 25.

46. Даны две непараллельные прямые l_1 и l_2, а также две точки A и B. Постройте такую точку M, что расстояния от неё до этих прямых равны, а также равны расстояния AM и BM. Сколько решений может иметь эта задача?

47. а) Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > BX$.

б) Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек X, что $AX+BX=CX+DX$.

З а м е ч а н и е. Обратите внимание на схему решения задачи со стр. 12 про геометрическое место точек.

48. Дан треугольник ABC. Точки I, I_a, I_b, I_c — центры соответственно вписанной и трёх вневписанных окружностей. Докажите, что точка I — ортоцентр (т. е. точка пересечения высот) треугольника $I_aI_bI_c$.

49. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, равен $(a+b-c)/2$.

50. Докажите, что а) если a, b, c — стороны треугольника, то найдутся такие положительные числа x, y, z, что $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$; б) для любых положительных чисел x, y, z числа $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ могут служить длинами сторон треугольника.

51. Докажите, что для сторон четырёхугольника $ABCD$ выполняется соотношение

$$AB+AD=CB+CD,$$

если стороны четырёхугольника (или их продолжения) касаются окружности, как показано а) на рис. 26; б) на рис. 27.

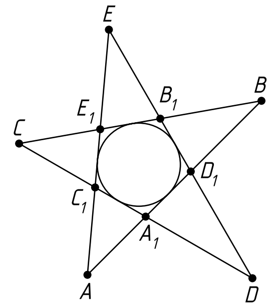

Рис. 28

52. Докажите, что стороны любого описанного шестиугольника $ABCDEF$ удовлетворяют равенству $AB+CD+EF=BC+DE+AF$.

53. Докажите, что равнобедренная трапеция может быть описана около окружности тогда и только тогда, когда её средняя линия равна боковой стороне.

54. В звёздчатый пятиугольник $ABCDE$, стороны которого пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, вписана окружность (рис. 28). Докажите, что

$$AA_1+BB_1+CC_1+DD_1+EE_1= \\ =A_1D+B_1E+C_1A+D_1B+E_1C.$$

55. Точки K, L, M и N — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что а) если $KM \perp LN$, то $AC=BD$; б) если $AC=BD$, то $KM \perp LN$.

56. Точки K, L, M и N — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$; точки E и F — середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что а) $KEMF$ — параллелограмм (если точки K, E, F, M не лежат на одной прямой); б) отрезки KM, LN, EF пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (если точки E и F не совпадают).

57. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF. Найдите величину угла FED, если угол ABC равен 120°.

§ 3. Вписанные углы

Как известно из школьного курса геометрии, дуги окружности можно измерять в градусах. Градусная мера всей окружности равна 360°, а одному градусу соответствует $1/360$ часть окружности.

Угол между двумя радиусами окружности (*центральный угол*) можно измерять той дугой, которая заключена внутри угла, так как величина центрального угла равна величине соответствующей ему дуги. Вписанный угол окружности также можно измерять с помощью высекаемой дуги. Об этом говорит *теорема о вписанном угле*, доказательство которой есть в любом учебнике геометрии.

Т е о р е м а о в п и с а н н о м у г л е. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Из этой теоремы сразу следует, что углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу, равны. Имеет место и более сильное утверждение.

Теорема о геометрическом месте точек. Пусть даны точки A, B и угол $\alpha < 180^\circ$. Геометрическим местом точек M таких, что $\angle AMB = \alpha$, являются две дуги окружностей, равные $360^\circ - 2\alpha$, проходящие через точки A и B и симметричные относительно прямой AB (рис. 29). При этом сами точки A и B в искомое геометрическое место точек не входят.

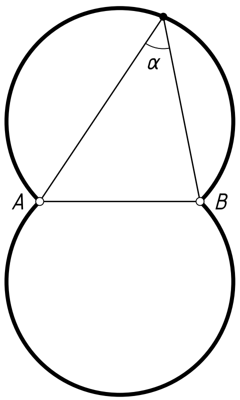

Рис. 29

Для обоснования этого факта достаточно доказать следующую теорему.

Теорема. Даны точки A и B, а также точка C вне прямой AB. Геометрическое место точек M, лежащих с точкой C в одной полуплоскости относительно прямой AB и таких, что $\angle ACB = \angle AMB$, есть дуга окружности, проходящая через точки A, C и B.

Доказательство. По теореме о вписанном угле все точки дуги окружности, описанной около треугольника ABC и содержащей точку C, обладают указанным свойством. Покажем, что никакая другая точка данной полуплоскости указанным свойством не обладает.

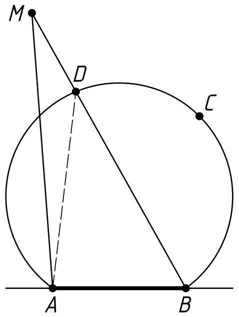

Рис. 30

Пусть M — точка, которая не принадлежит указанной дуге и лежит вне окружности, содержащей эту дугу. Если D — точка пересечения отрезка BM и дуги (рис. 30), то

$$\angle AMB = \angle ADB - \angle DAM < \angle ADB = \angle ACB,$$

т. е. $\angle AMB$ меньше $\angle ACB$. Значит, точка M не принадлежит искомому геометрическому месту точек.

Если отрезок BM не пересекает дугу, то следует в качестве точки D взять точку пересечения отрезка AM с дугой и провести аналогичные рассуждения. Подумайте самостоятельно, как доказать теорему для случая, когда ни AM, ни BM не пересекают дугу (рис. 31).

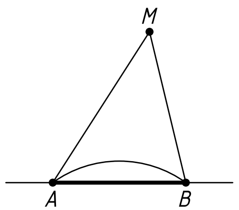

Рис. 31

Аналогично рассматривается случай, когда точка M лежит внутри окружности. Теорема доказана.

Опираясь на теорему о вписанном угле, нетрудно доказать следующие следствия.

1. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90° (на рис. 32 $\angle ACB = 90^\circ$).

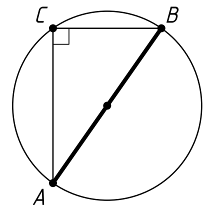

Рис. 32

2. Угол между хордой и касательной, проходящей через один из концов хорды, измеряется половиной дуги, стягиваемой этой хордой (на рис. 33 $\angle ABC = \alpha/2$).

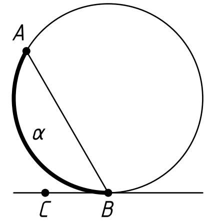

Рис. 33

3. Угол между двумя пересекающимися хордами измеряется полусуммой дуг, высекаемых этим углом и углом, вертикальным ему (на рис. 34 $\angle ABC = (\alpha + \beta)/2$).

4. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне окружности, измеряется полуразностью дуг, принадлежащих этому углу (на рис. 35 $\angle ABC = (\alpha - \beta)/2$).

5. Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180°.

58. Докажите следствия 1—4.

Следствие 5 является свойством четырёхугольника, вписанного в окружность. Оказывается, что это условие является не только необходимым для того, чтобы четырёхугольник был вписан в окружность, но и достаточным. Иначе говоря, имеет место следующая теорема.

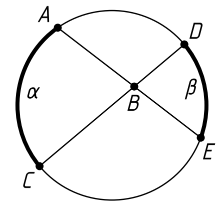

Рис. 34

Теорема о вписанном четырёхугольнике. Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов этого четырёхугольника равна 180°.

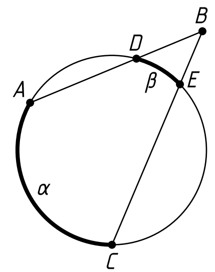

Рис. 35

Доказательство. 1) *Необходимость* («если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°») вытекает из теоремы о вписанном угле. Противоположные углы опираются на две дуги, дающие в сумме всю окружность; тогда сумма этих углов измеряется половиной всей окружности, т. е. равна $360^\circ/2 = 180^\circ$.

2) *Достаточность* («если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то его можно вписать в окружность») следует из теоремы о геометрическом месте точек (см. стр. 20). Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, в котором $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (рис. 36). Опишем около треугольника ABD окружность. Дуга BAD равна $360^\circ - 2\angle A = 2(180^\circ - \angle A)$. Поскольку угол C равен

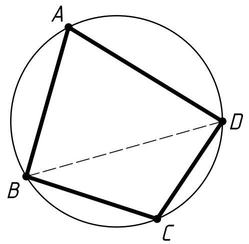

Рис. 36

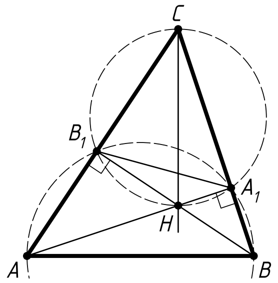

Рис. 37

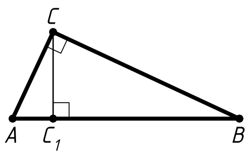

Рис. 38

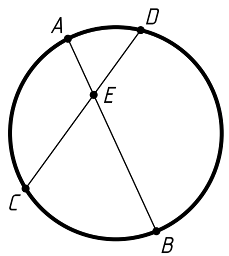

Рис. 39

$180^\circ-\angle A$, т. е. измеряется половиной этой дуги, то точка C лежит на окружности, т. е. четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.

Теорема доказана.

В качестве примера использования теоремы о вписанном четырёхугольнике приведём одно из доказательств существования ортоцентра (точки пересечения высот) треугольника.

Т е о р е м а. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай остроугольного треугольника ABC. Пусть две высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажем, что прямая CH перпендикулярна стороне AB (рис. 37).

По теореме о вписанном четырёхугольнике точки A_1, B_1, C и H лежат на одной окружности (так как $\angle HB_1C+\angle HA_1C=90^\circ+90^\circ=180^\circ$). По теореме о геометрическом месте точек точки A, B, A_1 и B_1 также лежат на одной окружности, поскольку $\angle AA_1B=\angle AB_1B=90^\circ$. Тогда из свойств вписанных углов следует, что $\angle B_1BA=\angle B_1A_1A$ и $\angle B_1A_1A=\angle B_1CH$. Значит, $\angle B_1BA=\angle B_1CH=\angle ACH$. Из треугольника AB_1B имеем равенство $\angle CAB+\angle B_1BA=90^\circ$; тогда и $\angle CAB+\angle ACH=90^\circ$, откуда следует, что прямая CH перпендикулярна прямой AB, что и требовалось доказать.

В случае, если треугольник ABC — тупоугольный, доказательство выглядит аналогично. Проведите его самостоятельно. Какие придётся сделать изменения по сравнению со случаем остроугольного треугольника?

Для прямоугольного треугольника утверждение теоремы очевидно: точкой пересечения высот AC, BC и CC_1 служит точка C (рис. 38). Теорема доказана.

Ряд теорем, посвящённых вписанным углам, говорит о соотношениях отрезков хорд.

Т е о р е м а о б о т р е з к а х п е р е с е к а ю щ и х с я х о р д. Если хорды AB и CD

пересекаются в точке E (рис. 39), то $AE:DE=CE:BE$.

Доказательство этой теоремы, основанное на подобии, содержится в школьном учебнике геометрии.

Рассмотрим теорему, которая даёт ещё одно свойство вписанного в окружность четырёхугольника.

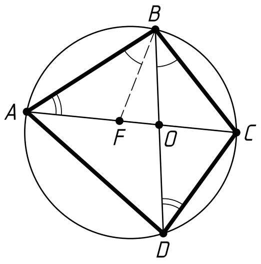

Рис. 40

Т е о р е м а П т о л е м е я. Произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вписанный четырёхугольник $ABCD$. Проведём диагонали AC и BD. Построим угол ABF, равный углу DBC (рис. 40). Треугольники ABF и DBC подобны по двум углам (вписанные углы BAC и BDC равны, так как опираются на одну и ту же дугу BC). Следовательно, $AB:BD=AF:CD$, откуда

$$AB\cdot CD=AF\cdot BD.$$

Аналогично доказывается, что подобны треугольники ABD и FBC. Следовательно, $AD:FC=BD:BC$, откуда

$$AD\cdot BC=FC\cdot BD.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AF\cdot BD+FC\cdot BD=(AF+FC)\cdot BD=AC\cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Птолемея часто используется при решении задач, в которых требуется найти длину какого-нибудь отрезка или доказать некоторое соотношение. При этом зачастую окружность, для которой надо применить теорему, не дана изначально, и её надо построить.

59. Дан треугольник ABC, в котором $\angle BAC=\pi/7$, а $\angle ABC=2\pi/7$. Докажите, что длины сторон этого треугольника связаны равенством

$$\frac{1}{BC}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}.$$

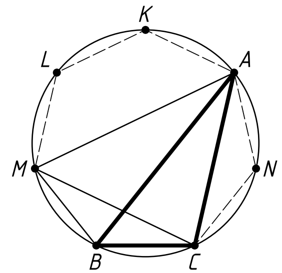

Рис. 41

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Опишем около данного треугольника окружность. Из условия следует, что дуга BC равна $2\pi/7$, а дуга AC равна $4\pi/7$. Тогда вершины A, B, C являются вершинами правильного семиугольника $AKLMBCN$, вписанного в ту же окружность (рис. 41). В самом деле, в правильном семиугольнике, вписанном в окружность, дуга, соединяющая соседние вершины, равна $2\pi/7$; таким образом, для того, чтобы построить этот семиугольник, достаточно разбить дугу AC пополам точкой N, а дугу AM — на три равные части точками K и L. Сторона семиугольника равна a.

Рассмотрим вписанный четырёхугольник $ACBM$. В нём $BC=BM=a$, $MC=AC=b$, $AM=AB=c$, так как равные дуги стягиваются равными хордами. Для этого четырёхугольника по теореме Птолемея имеет место соотношение $MC\cdot AB=BC\cdot AM+MB\cdot AC$ или $bc=ac+ab$. Поделив обе части последнего равенства на abc, получим:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{BC}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}.$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

60. Существует ли вписанный четырёхугольник, имеющий один тупой угол и три острых? Сколько прямых углов может иметь вписанный четырёхугольник?

61. Нарисуйте отрезок AB. Отметьте на плоскости чёрным цветом множество всех точек C, для которых треугольник ABC является прямоугольным; синим цветом — множество всех точек C, для которых треугольник ABC — тупоугольный; зелёным цветом — множество всех точек C, для которых треугольник ABC — остроугольный.

З а м е ч а н и е. Не забудьте, что следует не только сделать рисунок, но и доказать, что все точки имеют именно такой цвет, каким вы их изобразили!

62. Докажите, что трапеция может быть вписана в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

63. Докажите, что если через точки пересечения двух окружностей провести две произвольные секущие, то хорды, соединяющие между собой новые точки пересечения этих прямых с окружностями, будут параллельны.

З а м е ч а н и е. Не забудьте рассмотреть все возможные случаи расположения секущих!

64. Докажите, что в ситуации, изображённой на рис. 42, касательная, проведённая к окружности в точке A, параллельна прямой BC.

65. Докажите, что круги, построенные на сторонах четырёхугольника как на диаметрах, полностью покрывают его.

66. Правильный треугольник ABC вписан в окружность. Докажите, что для любой точки M этой окружности, отличной от точек A, B и C, расстояние от M до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от M до двух других вершин этого треугольника.

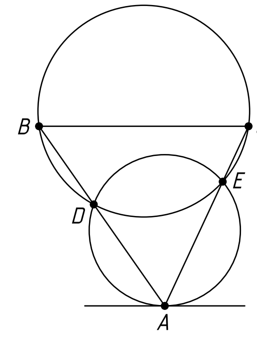

Рис. 42

67. Докажите, что в любом треугольнике ABC ($AB\neq AC$) точка пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к стороне BC лежит на описанной окружности.

68. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P. Докажите, что $PA+PC=\sqrt{2}\cdot PB$.

69. Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — вписанный.

70. Две окружности пересекаются в точках A и B; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

71. Около правильного семиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ описана окружность. На меньшей дуге, стягивающей сторону A_1A_7, взята произвольная точка M. Докажите, что

$$MA_2+MA_4+MA_6=MA_1+MA_3+MA_5+MA_7.$$

У к а з а н и е. Примените несколько раз теорему Птолемея.

72. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника ABC (или их продолжения) из произвольной точки описанной окружности (отличной от точек A, B и C), лежат на одной прямой (эта прямая называется *прямой Симпсона*).

73. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1, а затем на них опустили перпендикуляры A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что прямые AB и A_2B_2 параллельны.

74. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность; продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Докажите, что а) биссектрисы углов P и Q перпендикулярны; б) точки пересечения биссектрис углов P и Q со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

75. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D — точки касания; при этом точка C не совпадает с A, а точка D не совпадает с B). Докажите, что прямая, соединяющая точку P с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна прямой AB.

§ 4. Теоремы синусов и косинусов. Решение треугольников

При решении геометрических задач, особенно связанных с вычислениями, полезным оказывается знание алгебраических соотношений между элементами треугольника, многие из которых являются следствием теорем синусов и косинусов. Введём стандартные обозначения, которых мы будем придерживаться в дальнейшем. Пусть дан треугольник ABC. Обозначим:

- $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$;
- $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$;
- $p=(a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника ABC;
- r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности;
- R — радиус описанной около треугольника ABC окружности;
- h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные соответственно на стороны a, b и c;
- m_a, m_b, m_c — медианы, исходящие соответственно из вершин A, B и C;
- l_a, l_b, l_c — биссектрисы, исходящие соответственно из вершин A, B и C;
- S — площадь треугольника ABC.

Задачи, в которых по нескольким заданным элементам треугольника требуется определить все (или некоторые) остальные, называются задачами на решение треугольников. В простейших случаях для решения таких задач оказывается достаточно теорем синусов и косинусов, применению которых и посвящён данный параграф. В более сложных случаях приходится использовать и другие теоремы.

Выпишем несколько основных формул, полезных в задачах на решение треугольников:

1) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (*теорема косинусов*);

2) $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (*обобщённая теорема синусов*);

3) $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (*теорема о сумме углов треугольника*);

4) $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$;

5) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$;

6) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*);

7) $S=pr$;

8) $S=\dfrac{abc}{4R}$;

9) $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$ (*теорема тангенсов*).

Приведённые формулы дают возможность, зная три каких-либо элемента треугольника, найти не только все его стороны и углы, но и все его медианы, биссектрисы, высоты, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

Замечание. Вообще говоря, не по любым трём элементам треугольника можно однозначно определить все остальные элементы. Например, три угла задают треугольник лишь с точностью до подобия; две стороны и угол, не лежащий между ними, также не всегда задают треугольник однозначно (см. задачу **42**).

Разберём теперь несколько задач.

76. Найдите высоты треугольника, стороны которого равны a, b, c.

Решение. Зная все стороны треугольника, можно выразить его площадь по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. С другой стороны, $S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$, откуда $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Аналогично выражаются h_b и h_c.

Ответ: $h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $h_b=\dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $h_c=\dfrac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

77. В треугольнике ABC известны длины трёх сторон a, b, c. Точка D лежит на отрезке AB. Известно, что $AD=n$, $BD=m$. Найдите длину отрезка CD.

Решение. Пусть $d=CD$, $\angle CDB=\varphi$ (рис. 43). Тогда $\angle CDA=180^\circ-\varphi$. По теореме косинусов

$$\begin{cases} a^2=d^2+m^2-2dm\cos\varphi,\\ b^2=d^2+n^2+2dn\cos\varphi.\end{cases}$$

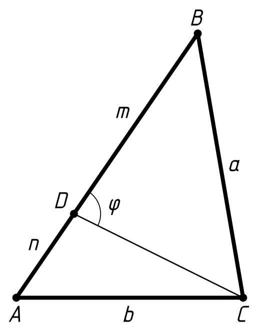

Рис. 43

Умножая первое уравнение на n, а второе — на m и складывая их, получаем: $na^2+mb^2=(m+n)\times d^2+mn(m+n)$. Отсюда, учитывая равенство $m+n=c$, имеем: $d^2=\dfrac{n}{c}a^2+\dfrac{m}{c}b^2-mn$. Извлекая из обеих частей равенства арифметический корень, получаем окончательный ответ.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{n}{c}a^2+\dfrac{m}{c}b^2-mn}$.

Полученная формула называется *формулой Стюарта*. Найдём с её помощью длину медианы, проведённой к стороне c треугольника, если две другие его стороны равны a и b. В этом случае в обозначениях задачи **77** имеем $m=n=c/2$, и тогда

$$m_c=\sqrt{\frac{c/2}{c}a^2+\frac{c/2}{c}b^2-\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}.$$

78. Найдите при помощи формулы Стюарта длины всех биссектрис треугольника, если известны его стороны.

Приведём ещё одно доказательство теоремы Птолемея, встречавшейся нам в § 3: произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Проведём диагонали AC и BD (рис. 44) и положим $\angle ACD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$. Тогда $\angle ADB=\gamma$, поскольку вписанные углы ACB и ADB опираются на одну и ту же дугу AB. По теореме о сумме углов треугольника $\angle CAD=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)$.

По обобщённой теореме синусов:

$BD=2R\sin(\alpha+\gamma)$ (из треугольника BDC),
$AC=2R\sin(\beta+\gamma)$ (из треугольника ACD),
$AD=2R\sin\alpha$ (из треугольника ACD),
$AB=2R\sin\gamma$ (из треугольника ABC),
$BC=2R\sin\beta$ (из треугольника BDC),
$CD=2R\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ (из треугольника ACD).

Использовав тождество $\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\beta+\sin\gamma\times\times\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ (убедитесь в его справедливости самостоятельно), получаем из записанных равенств, что $AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot CD$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример экстремальной задачи (так называются задачи, в которых надо найти максимальное или минимальное возможное значение какой-либо величины), решаемой при помощи теоремы косинусов.

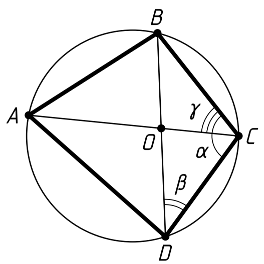

Рис. 44

79. На окружности радиуса R отмечены две точки A и B, расстояние между которыми равно l, причём $l<2R$. Каково наибольшее значение суммы AC^2+BC^2, если точка C также лежит на данной окружности?

Решение. Введём в треугольнике ABC стандартные обозначения: $a=BC$, $b=AC$, $\angle C=\gamma$. Запишем теорему косинусов для треугольника ABC: $l^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, откуда

$$a^2+b^2=l^2+2ab\cos\gamma. \qquad (*)$$

Следовательно, в точке максимума угол γ должен быть острым (чтобы его косинус оказался положительным); тогда точка C расположена в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и центр окружности. В этом случае при любом выборе точки C угол γ будет принимать одно и то же значение, как вписанный угол, опирающийся на дугу AB.

Запишем площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{1}{2}lh_c,$$

где h_c — высота треугольника ABC, опущенная из вершины C. Приравняв правые части этих выражений и поделив обе части на $\sin\gamma$, получим: $ab=\dfrac{lh_c}{\sin\gamma}$. Подставляя это выражение для ab в формулу $(*)$, имеем: $a^2+b^2=l^2+2lh_c\operatorname{ctg}\gamma$. Как отсюда видно, максимальное значение суммы a^2+b^2 достигается при максимальном значении высоты h_c (подчеркнём, что остальные параметры l, $\operatorname{ctg}\gamma$ в данном случае фиксированы).

Проведём через центр окружности O и середину K отрезка AB прямую. Пусть M — точка пересечения этой прямой с окружностью, лежащая в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и точка O; пусть q — касательная к окружности, проходящая через точку M (рис. 45). Прямая MO перпендикулярна как AB, так и q (почему?). Следовательно, $AB\parallel q$. Точка C находится между AB и q; таким образом, h_c не превосходит расстояния между этими прямыми, равного MK. Максимальное значение h_c равно MK и достигается, когда точка C совпадает с M.

Найдём длину MK. Очевидно, $MK=MO+OK==R+OK$. Длину OK найдём из прямоугольного треугольника OBK по теореме Пифагора: $OK^2=OB^2--KB^2=R^2-(l/2)^2$. Тогда $MK=R+\sqrt{R^2-(l/2)^2}$. По обобщённой теореме синусов $\sin\gamma=\dfrac{l}{2R}$, откуда, учитывая, что угол γ острый, получим:

$$\operatorname{ctg}\gamma=\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=\frac{\sqrt{1-(l/2R)^2}}{l/2R}=\frac{\sqrt{(2R)^2-l^2}}{l}.$$

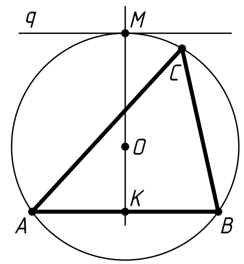

Рис. 45

Таким образом, максимальное значение a^2+b^2 равно

$$l^2+2lh_c \operatorname{ctg} \gamma = l^2+2l\left(R+\sqrt{R^2-(l/2)^2}\right)\frac{\sqrt{(2R)^2-l^2}}{l} = 4R^2+2R\sqrt{4R^2-l^2}.$$

О т в е т: $4R^2+2R\sqrt{4R^2-l^2}$.

В заключение рассмотрим задачу на нахождение геометрического места точек.

80. На прямой даны точки A и B. Две окружности касаются этой прямой в точках A и B и друг друга в точке M. Найдите множество всех таких точек M.

Р е ш е н и е. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 46). Тогда точки O_1, O_2 и M лежат на одной прямой, а треугольники AO_1M и BO_2M — равнобедренные. Следовательно, $\angle AMO_1 = \angle O_1AM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_1M$ и $\angle BMO_2 = \angle O_2BM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BO_2M$. По свойству касательной $AB \perp AO_1$, $AB \perp BO_2$; следовательно, $AO_1 \parallel BO_2$. Тогда $\angle AO_1M + \angle BO_2M = 180^\circ$, откуда

$$\angle AMO_1 + \angle BMO_2 = \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_1M\right) + \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle BO_2M\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle AO_1M + \angle BO_2M) = 90^\circ.$$

А поскольку углы AMO_1, BMO_2 и AMB вместе образуют развёрнутый угол, то их сумма равна 180°, откуда $\angle AMB = 90^\circ$, что означает, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

Покажем теперь, что все точки этой окружности, за исключением A и B, подходят (аккуратно обоснуйте, почему точки A и B не входят в искомое геометрическое место точек). Пусть M — произвольная точка окружности с диаметром AB, отличная от A и B. Тогда $\angle AMB = 90^\circ$. Восстановим из точек A и B перпендикуляры l_1 и l_2 к прямой AB.

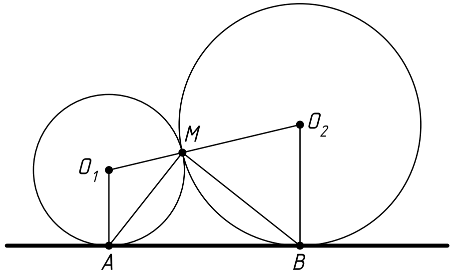

Рис. 46

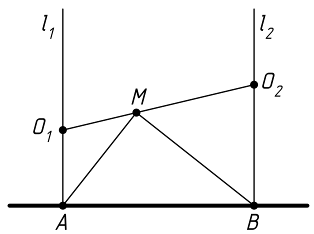

Рис. 47

Осталось провести через точку M прямую, пересекающую эти перпендикуляры в точках O_1 и O_2 соответственно так, чтобы $\angle AMO_1 = \angle O_1AM$ и $\angle BMO_2 = \angle O_2BM$ (рис. 47); отсюда будет следовать, что $O_1A = O_1M$ и $O_2B = O_2M$. Докажем, что провести такую прямую всегда возможно. В самом деле, $\angle O_1AM + \angle O_2BM = (90^\circ - \angle MAB) + (90^\circ - \angle MBA) = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 180^\circ - (180^\circ - \angle AMB) = \angle AMB = 90^\circ$. Для любой прямой, проходящей через M и пересекающей l_1 и l_2 в точках O_1 и O_2, расположенных в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и точка M, углы AMO_1, AMB и BMO_2 вместе образуют развёрнутый угол; тогда $\angle AMO_1 + \angle BMO_2 = 90^\circ = \angle O_1AM + \angle O_2BM$. Таким образом, достаточно провести прямую так, чтобы выполнялось равенство $\angle AMO_1 = \angle O_1AM$; равенство $\angle BMO_2 = \angle O_2BM$ будет автоматически следовать отсюда и из соотношения $\angle AMO_1 + \angle BMO_2 = \angle O_1AM + \angle O_2BM$.

Теперь, если построить окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами O_1M и O_2M соответственно, то они будут касаться друг друга и прямой AB (докажите это самостоятельно).

О т в е т: окружность, построенная на AB как на диаметре, исключая точки A и B.

Упражнения

81. В треугольнике известны длины боковых сторон b, c и величина угла α при вершине. Найдите длины всех медиан треугольника.

82. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что длины его высот равны h_a, h_b, h_c.

83. Четырёхугольник вписан в окружность. Длины его сторон равны a, b, c, d. Найдите косинусы углов этого четырёхугольника.

84. Определите длины диагоналей вписанного четырёхугольника, если известны длины всех его сторон a, b, c, d.

85. Докажите, что площадь вписанного в окружность четырёхугольника со сторонами a, b, c, d равна

а) $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — его полупериметр;

б) $\sqrt{abcd}$, если этот четырёхугольник, кроме того, описан около окружности.

86. Площадь S треугольника ABC удовлетворяет соотношению $S = BC^2 - AC^2 + AB^2$. Найдите тангенс угла B этого треугольника (стороны треугольника неизвестны!).

87. На отрезке между центрами двух касающихся внешним образом окружностей как на диаметре построена третья окружность. Докажите, что все три окружности касаются одной прямой.

88. В треугольник с основанием a и углом при вершине α вписан круг. Найдите радиус окружности, проходящей через центр этого круга и концы основания треугольника.

89. Дан треугольник ABC с углами α, β, γ. Биссектрисы его углов пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

90. Треугольник, радиус описанной окружности которого равен R, разделён биссектрисой угла A на два треугольника. Найдите косинус угла A, если радиусы окружностей, описанных около двух получившихся треугольников, равны R_1 и R_2.

91. Докажите теорему Бретшнейдера: для произвольного выпуклого четырёхугольника со сторонами a, b, c, d, диагоналями e, f и суммой каких-то двух противоположных углов φ выполнено равенство

$$e^2f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi.$$

92. В треугольнике даны сторона a и противолежащий угол α. Найдите наибольшее значение суммы квадратов двух других сторон.

93. На плоскости задан отрезок BC длины a. Найдите геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей, вписанных в треугольники с основанием BC и углом при вершине α.