МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
О54

О54 **Олимпиадные** задачи : методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / автор-составитель Е. Ю. Иванова — М. : изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 24 с. : ил.

ББК 22.1

Олимпиадные задачи.

Автор-составитель Е. Ю. Иванова.

Редактор Д. Г. Мухин. Техн. редактор Д. Е. Щербаков.

Формат 60×90/16. Объём 1,5 физ. печ. л.
Гарнитура обыкновенная новая.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

Предисловие

Данная разработка составлена на основе задач вечернего отделения Малого мехмата. Она посвящена избранным вопросам олимпиадного плана, обычно не затрагиваемым в средней школе, однако находящим широкое применение при решении задач всевозможных математических олимпиад для школьников.

В первом параграфе разобраны задачи на широко известный принцип Дирихле. Помимо простых задач, здесь предлагаются и достаточно сложные задачи, в которых центральной часто является другая идея, а принцип Дирихле лишь помогает в достижении цели.

Во втором параграфе исследованы задачи, связанные с идеей нахождения инварианта. Такие задачи часто можно выделить даже по самому условию: обычно речь в них идёт о каких-либо позициях, действиях, играх и т. п. Эти задачи часто оказываются очень сложны уже тем, что инвариант бывает достаточно трудно находим.

В третьем параграфе собраны задачи на использование метода математической индукции — достаточно сильного метода решения не только олимпиадных задач.

Мы постарались подобрать задачи так, чтобы их методы решения были наиболее типичны для каждого из классов задач. Выводы, полученные при решении многих из разобранных примеров, зачастую являются «ключом» к решению других, более сложных задач. Хотелось бы также обратить ваше внимание на форму решения в приведённых примерах, так как строгость и последовательность изложения играют немаловажную роль при решении сложных задач.

Надеемся, что разобранные задачи окажут вам помощь при подготовке к математическим сражениям в вашей школе, городе, области, а, может, и более весомым олимпиадам.

Желаем успеха!

§ 1. Принцип Дирихле

Возможно, вы уже слышали про этот принцип. И, скорее всего, в первый раз вы услышали его формулировку в таком шутливом виде: «Пусть есть n клеток, в которых сидит не менее $n+1$ кроликов. Тогда найдётся клетка, в которой сидит не меньше двух кроликов.»

Доказательство этого факта чрезвычайно просто. Предположим, что это не так, т. е. в каждой клетке сидит не более одного кролика (один или ни одного). Тогда, так как клеток n, то во всех клетках сидит не более, чем n кроликов, что противоречит условию.

Обратите внимание, что мы не можем указать, в какой именно клетке сидит больше одного кролика (даже не можем сказать, на сколько больше), мы можем только утверждать, что такая клетка обязательно есть. Казалось бы, полученных сведений совсем мало, однако и на основании таких незначительных данных можно делать значительные выводы.

Разберём применение принципа Дирихле на примерах.

1. а) В коробке лежат шарики двух цветов. Сколько шариков достаточно наугад вынуть из коробки, чтобы среди них заведомо нашлись два одного цвета?

Решение. Понятно, что двух шариков недостаточно: может оказаться один чёрный, другой белый. Вынем три шарика. Так как цвета всего два, то по принципу Дирихле хотя бы два шарика будут одного цвета.

Ответ: 3 шарика.

Замечание. Вытаскивая три шарика, мы будем уверены, что сможем выбрать из них два одного цвета, но неизвестно, какого — чёрного или белого.

1. б) В лесу растёт миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 400 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся по крайней мере три ёлки с одинаковым числом иголок.

Решение. Будем рассаживать наших «кроликов-ёлок» по «клеткам» с номерами от 0 до 400 000. В каждую «клетку» будем «сажать» те ёлки, у которых число иголок равно номеру клетки. Задача будет решена, если мы докажем, что найдётся «клетка», в которой «сидит» не менее трёх ёлок. Всего «клеток» 400 001 штука. И если бы в каждой из них сидело не более двух «кроликов-ёлок», то всего ёлок было бы не более, чем $2\cdot 400\,001=800\,002$ штук. А это не так. Следовательно, найдётся хотя бы одна «клетка», в которой не менее трёх «кроликов».

Замечание. Мы доказали, что таких ёлок не менее трёх, но мы не знаем точно, сколько их. Может быть, 5, может быть, 100, а может быть и весь миллион. Более того, мы не знаем, сколько конкретно иголок на них. Может, 5, может, 400 000, а может и ни одной!

Иногда принцип рассуждений, использованный в предыдущей задаче, ещё называют *обобщённым принципом Дирихле*: если в N клетках сидит не менее $kN+1$ кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит не менее $k+1$ кроликов.

Заметим, что при $k=1$ обобщённый принцип Дирихле превращается в обычный принцип Дирихле.

2. В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зелёный. Какое минимальное число шаров нужно вынуть не глядя, чтобы наверняка достать 2 шара одного цвета?

3. а) В тёмной комнате стоит шкаф, в ящике которого лежат 24 чёрных и 24 синих носка. Сколько носков следует взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета? (Речь идёт о минимальном числе носков.)

б) Сколько надо взять носков, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару носков чёрного цвета?

4. Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 12 пар чёрных и 12 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а) и пару чёрного цвета (как в пункте б)?

5. Белых и чёрных кроликов рассаживали по клеткам. Белых было больше, чем чёрных. Докажите, что найдётся клетка, в которой белых кроликов сидит больше, чем чёрных.

6. Петя хочет написать на доске 55 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100. Сможет ли он это сделать?

7. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Решение. Заметим следующий факт: если длины сторон некоторого треугольника не больше a, то длина отрезка, соединяющего любые две точки этого треугольника, не больше a. Докажем это.

Пусть M и N — две точки заданного треугольника ABC. Если они не лежат на сторонах этого треугольника, то можно продлить прямую MN до пересечения со сторонами треугольника в точках M_1 и N_1. Очевидно, что длина отрезка MN будет не больше длины отрезка M_1N_1 (рис. 1). Если M_1N_1 параллелен третьей стороне треугольника, то из свойства трапеции его длина будет не больше длины этой стороны.

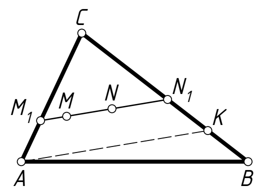

Рис. 1

Если же M_1N_1 не параллелен третьей стороне треугольника, то тогда из одной вершины

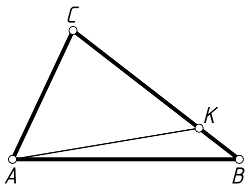

Рис. 2

треугольника можно провести прямую, параллельную M_1N_1 (например, на рис. 1 это прямая AK), и длина MN будет меньше длины AK. Осталось доказать, что длина отрезка, соединяющего одну из вершин треугольника с точкой на противоположной стороне, не превосходит длины наибольшей стороны этого треугольника.

Пусть K — точка на стороне BC и $\angle C \leqslant \angle B$ (рис. 2). Тогда угол AKB — внешний для треугольника ACK, следовательно, $\angle AKB > \angle C \geqslant \angle B$. В треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона. Следовательно, $AB > AK$.

Теперь можно решить исходную задачу. Если бы равносторонний треугольник можно было покрыть двумя равносторонними треугольниками меньшего размера, то по принципу Дирихле один из этих треугольников покрывал бы две вершины исходного, но тогда он содержал бы в себе отрезок, длина которого была бы больше, чем длина его стороны. Противоречие.

8. У человека на голове не более 400 000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос.

9. О населении города Поданк известно следующее:

а) Среди жителей Поданка не найдётся двух с равным числом волос на голове.

б) Ни у одного жителя Поданка на голове не растёт ровно 518 волос.

в) Жителей в Поданке больше, чем волос на голове любого из них.

Какова наибольшая численность населения г. Поданка?

10. а) Докажите, что в вашем классе найдутся два человека с одинаковым числом друзей среди одноклассников.

б) Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число знакомых в данной компании.

11. Пусть сумма n чисел равна A. Докажите, что среди этих чисел найдётся число:

а) не большее A/n; б) не меньшее A/n.

12. Четырёхугольник площади S четырьмя прямыми разбили на 9 четырёхугольников. Докажите, что найдётся четырёхугольник, площадь которого не меньше $S/9$.

В предыдущих задачах было ясно из условия, что именно надо считать «клетками», а что — «кроликами». Обычно угадать «кроликов» несложно. Скорее всего, это те объекты, про которые и надо что-то выяснить, хотя и не всегда. Иногда надо рассматривать не все предложенные объекты, а только часть из них, или, наоборот, добавить к ним ещё несколько и рассматривать всё полученное множество. А как узнать «клетки»? Именно в этом и состоит основная проблема в следующих задачах — придумать признак, по которому можно рассортировать объекты, и определить, что именно будем сортировать.

13. а) Докажите, что из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

б) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, у которых разность любых двух делится на 7?

Р е ш е н и е **13**. а) Пусть даны любые 8 целых чисел. Найдём остаток от деления каждого из них на 7. Всего существует 7 возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. У нас имеется восемь остатков; значит, хотя бы два из них совпадают. Таким образом, по крайней мере два из восьми данных чисел дают один и тот же остаток при делении на 7. Тогда их разность должна делиться на 7.

14. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдутся несколько, сумма которых делится на 10. (Замечание: одно число — это тоже «несколько». Тогда его «сумма» совпадает с самим этим числом.)

15. а) Докажите, что для любого натурального числа n существует число вида 111. . . 11000. . . 00, делящееся на n.

б) Докажите, что среди чисел, записываемых одними единицами, найдётся число, делящееся на 1999.

Р е ш е н и е **15**. а) Рассмотрим числа, состоящие из одних единиц. Таких чисел существует бесконечно много. Различных же остатков при делении на n может быть только n: 0, 1, 2, . . . , $n-1$. По принципу Дирихле найдутся два числа с одинаковыми остатками. Вычтем тогда из большего меньшее. Полученное число делится на n и имеет требуемый вид.

16. Докажите, что найдётся степень числа 19, оканчивающаяся цифрами 001.

17. Докажите, не вычисляя, что в десятичной записи числа 1999^6 найдутся по крайней мере три одинаковые цифры.

18. Дано 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 20. Докажите, что из них можно выбрать два, одно из которых делится на другое.

19. В ковре размером 4 м$\times$4 м моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1 м$\times$1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считайте точечными.)

20. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, раскрашенные в один цвет.

21. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

22. На планете Зям-Лям в звёздной системе тау Кита суша занимает больше половины площади всей планеты, имеющей форму шара. Докажите, что таукитяне могут прорыть туннель через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита.)

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых стоило только догадаться, к чему именно надо применить принцип Дирихле, и задача «решалась». Но часто в одной задаче приходится применять этот принцип не один раз, а то и использовать разные «клетки», т. е. разные способы разбиения на группы предметов, описываемых в задаче. Попробуйте!

23. Докажите, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Р е ш е н и е. Изобразим наши шесть человек шестью точками на плоскости. Будем соединять точки красным отрезком, если соответствующие им люди знакомы (знакомство взаимно), и синим, если люди незнакомы. Таким образом, требование задачи — доказать, что тогда на плоскости будет обязательно нарисован либо красный треугольник с вершинами в выбранных точках, либо синий. Докажем это.

Выберем одну из точек. Пусть это точка A. Тогда с остальными пятью точками она соединена либо красным (сплошная линия на рис. 3), либо синим (пунктир) отрезком. По принципу Дирихле с какими-то тремя (может быть и больше!) точками она соединена отрезками одного типа. Пусть это красные отрезки. Рассмотрим эти три точки. Если какие-то две из них соединены также красным отрезком, то вместе с A получаем красный треугольник. Если же таких точек нет, то выбранные три точки образуют синий треугольник. Понятно, что рассуждения будут теми же самыми, если к точке A проведено больше не красных, а синих отрезков.

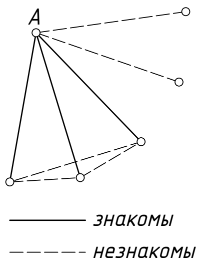

Рис. 3

24. Каждый из 17 учёных переписывается с остальными. В их переписке речь идёт лишь о трёх темах. Каждая пара учёных переписывается друг с другом только по одной теме. Докажите, что не менее трёх учёных переписываются друг с другом по одной и той же теме.

25. На клетчатой плоскости выбрано 5 произвольных узлов сетки. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

У к а з а н и е. Вспомните, как искать координаты середины отрезка, если известны координаты его концов.

26. На плоскости отмечены 6 точек так, что любые три из них образуют треугольник со сторонами разной длины. Докажите, что найдутся два треугольника таких, что наименьшая сторона первого одновременно является наибольшей стороной второго.

27. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого в классе не менее 12 друзей.

28. В лесу живут 20 гномов, каждый из которых дружит по крайней мере с 14-ю другими гномами. Обязательно ли найдутся 4 гнома, которые все дружат между собой?

§ 2. Инварианты

Пусть на листке написаны 9 чисел: 4 нуля и 5 единиц. Будем выполнять следующую операцию: зачеркнём любые два числа и напишем вместо них 0, если они были одинаковы, и 1, если они были различны. На каждом шаге количество чисел уменьшается, поэтому наступит момент, когда останется только одно число. Проделайте сами это упражнение. (Вопрос: сколько шагов вам пришлось сделать? Изменится ли число шагов при другой последовательности зачёркивания чисел?) У вас осталось одно число? Это 1!

Откуда же заранее известно, что у вас получилась 1, ведь операции можно выполнять различными способами? (Попробуйте, например, выполнить то же упражнение другим способом.)

Всё дело в том, что после каждого шага сумма всех незачёркнутых чисел на листке остаётся нечётной (как и в начале). Проверим:

было	*стало*	*изменение*
00, сумма — 0	0, сумма — 0	не изменилась
01, сумма — 1	1, сумма — 1	не изменилась
10, сумма — 1	1, сумма — 1	не изменилась
11, сумма — 2	0, сумма — 0	уменьшилась на 2

Таким образом, при любой из разрешённых операций сумма чисел либо не изменяется, либо уменьшается на 2, т. е. чётность суммы неизменна. И если в начале она была нечётна (равна 5), то и в конце будет нечётна, а так как должно получиться число 0 или 1, то это 1.

Мы нашли *инвариант* — то, что не изменяется. На самом деле в этом примере есть ещё один инвариант, который нам не пригодился — число шагов.

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. Например, отношение линейных размеров подобных фигур или разность арифметической прогрессии. Инвариантом также могут обладать элементы какого-либо множества, например, вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, или множество всех углов, для каждого из которых справедливо основное тригонометрическое тождество. Инварианты присутствуют и в курсе физики: угол падения, равный углу отражения, скорость равномерного движения и т. п.

Олимпиадные задачи на инварианты можно условно разбить на два вида: те, в которых требуется доказать некий инвариант, т. е. он явно определён, и те, в которых инвариант используется при решении и сразу неочевиден. Существует также класс задач, при решении которых используются *полуинварианты* — значения точной верхней и нижней грани для некоторой величины. Наиболее часто они используются в задачах на доказательство экстремума (т. е. максимального или минимального значения) какой-либо величины. Об этом мы поговорим чуть ниже.

В чём же состоит главная идея применения инварианта? В задаче задан некий объект, над которым производятся некоторые операции. Ставится вопрос: можно ли получить с помощью этих операций другой объект с определённым свойством? Чтобы выяснить это, мы строим некую величину, которая не изменяется при совершении разрешённых операций (инвариантна), и если значения этой величины различны у двух указанных объектов, то ответ на вопрос задачи отрицательный.

З а м е ч а н и е. Если выбранный инвариант даёт одинаковые значения для двух объектов, это ещё не значит, что один можно получить из другого указанными операциями! Но часто найденный инвариант позволяет это доказать.

29. На доске написаны числа от 1 до 1998. Разрешается за один ход стирать любые два числа и вместо них записывать их разность, пока не останется одно число. Может ли это число быть нулём?

Р е ш е н и е. Рассмотрим сумму всех чисел, записанных на доске до и после одного шага. Пусть мы стёрли числа a и b. Тогда сначала сумма всех чисел была равна $S+a+b$, а потом $S+a-b=(S+a+b)-2b$, где S — сумма всех остальных чисел. Как видим, замена $a+b$ на $a-b$ не меняет чётности суммы всех чисел. Сумма всех чисел в самом начале есть нечётное число ($1999\cdot 999$), значит, на каждом шаге сумма

записанных на доске чисел будет нечётна, а ноль — чётное число, поэтому получить его на доске мы не сможем.

О т в е т: нет.

30. На доске написаны числа 1, 2, ..., 1999. За один ход разрешается стереть любое количество чисел и вместо них записать остаток от деления их суммы на 11. Через несколько ходов на доске остались два числа, одно из которых — 1000. Чему равно второе число?

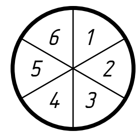

Рис. 4

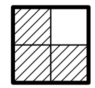
Рис. 5

31. Некий злоумышленник проник на склад, где хранились бочки с мёдом и бочки с дёгтем. Он положил ложку дёгтя в бочку мёда и тщательно перемешал, после чего той же ложкой зачерпнул смеси и положил её в бочку с дёгтем. Чего теперь больше: дёгтя в бочке с мёдом или мёда в бочке с дёгтем?

32. а) Круг разделён на 6 секторов (рис. 4), в которых по порядку написаны числа от 1 до 6. За один ход разрешается добавить по единице к двум соседним числам. Можно ли через некоторое число шагов получить во всех секторах одинаковые числа?

б) Тот же вопрос, если числа написаны не по порядку.

33. В некотором государстве было 10 банков. С момента перестройки общества все захотели стать банкирами. Но по закону открыть банк можно только путём деления уже существующего банка на 4 новых. Через некоторое министр финансов сообщил президенту, что в стране действует 1998 банков, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?

34. 2000 чисел x_1, x_2, ..., x_{2000} записаны в строчку. Известно, что сумма любых трёх соседних из них равна 200. При этом первое число равно 19, последнее — 98. Найдите остальные 1998 чисел.

35. Каждая клетка квадратной таблицы 2×2 закрашена в чёрный или белый цвет (рис. 5). За один ход можно перекрасить клетки в любой строке, в любом столбце или в любой диагонали: чёрные — в белый цвет, а белые — в чёрный цвет. Можно ли через несколько ходов получить таблицу, все клетки которой белые?

Р е ш е н и е. Сопоставим каждой клетке 1, если она покрашена в белый цвет, и -1, если она покрашена в чёрный цвет. Тогда смена цветов означает замену знаков. Рассмотрим произведение всех чисел, соответствующих клеткам. Так как при перекрашивании мы изменяем знаки ровно у двух сомножителей, то произведение всех четырёх чисел не изменяется. В самом начале это произведение равно -1. Требуемой раскраске соответствует произведение, равное 1. Следовательно, указанными операциями перекрасить таблицу невозможно.

О т в е т: нет.

а)

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

б)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

в)

+	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
−	+	+	+

г)

+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+

Рис. 6

36. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит «+» или «—» (рис. 6). За один ход можно поменять знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

Указание. Подумайте, как изменяется число «минусов»: в пункте б) — во всей таблице, а в пунктах в), г) — в некоторой выделенной её части. Воспользуйтесь также решением задачи **35**.

37. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит «+» или «—» (рис. 7). За один ход можно поменять знаки на противоположные в любой строке, в любом столбце или на какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак в любой угловой клетке). Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

38. Несколько одинаковых равносторонних треугольников, в вершинах которых стоят числа 1, 2, 3, сложены стопкой. Может ли сумма при каждой вершине быть равной а) 25; б) 50?

39. а) На шести ёлках сидят шесть соро́к — по одной на каждой ёлке. Ёлки растут на прямой с интервалом в 10 м. Если какая-то сорока перелетает с одной ёлки на другую, то какая-нибудь другая сорока обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все сороки собраться на одной ёлке?

б) А если соро́к и ёлок по семь?

в) Для какого числа n соро́к и ёлок такое возможно?

40. 1998 шашек выставлены в ряд. Любые две шашки, стоящие через одну, можно поменять местами. Можно ли переставить все шашки в обратном порядке?

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 7

41. В ряд выписаны 1999 различных чисел. За один ход разрешается менять местами любые два соседних числа. Может ли через 1999 ходов порядок чисел оказаться исходным?

42. Члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ — натуральные числа. Суммы цифр её членов образуют новую последовательность $\{b_n\}$. Будет ли она возрастающей?

43. На доске записаны числа от 1 до 1999. За один ход можно стереть одно или несколько чисел и вместо них написать либо их сумму, либо сумму их цифр. Можно ли в конце концов получить, что на доске будет записано единственное число 111?

Решение. Рассмотрим остаток от деления на 3 суммы записанных чисел. Заметим, что при указанных операциях этот остаток является инвариантом. Любое число при делении на 3 (так же, как и на 9) даёт тот же остаток, что и сумма его цифр. А остаток от деления на 3 суммы нескольких чисел равен остатку от деления на 3 суммы остатков (от деления на 3) этих чисел. Первоначально сумма всех записанных чисел равна 1999000, т. е. при делении на 3 остаток равен 1. Требуемое же число делится на 3 без остатка, поэтому получить это число указанными операциями невозможно.

Ответ: нет.

44. Пусть A — число, записанное с помощью 3^{1998} девяток. Обозначим через $A_1=\Sigma(A)$ сумму цифр числа A, аналогично $A_2=\Sigma(A_1)$, $A_3=\Sigma(A_2)$. Найдите A_4.

45. На льду лежат три шайбы, образуя треугольник. Хоккеист бьёт по одной из них так, чтобы она прошла между двумя другими и остановилась в некоторой точке. Можно ли все шайбы вернуть на свои места после 1999 ударов?

46. На доске написаны числа от 1 до 20. За один ход разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $ab+a+$ $+b$. В конце концов на доске останется одно число. Какое это может быть число?

Указание. $ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$.

47. В трёх кучках лежат 1, 9 и 98 камней. За один ход разрешается из любых двух кучек взять по одному камню и переложить их в третью. Можно ли за несколько ходов собрать все камни в одной из кучек?

Решение. Рассмотрим остатки при делении на три исходных чисел — количества камней в кучках. В первой кучке остаток 1, во второй — 0, в третьей — 2. Рассмотрим, что будет происходить с точки зрения остатков, когда мы перекладываем камни:

1 кучка		*2 кучка*		*3 кучка*	
взяли 1	нов. ост. 0	взяли 1	нов. ост. 2	полож. 2	нов. ост. 1
взяли 1	нов. ост. 0	полож. 2	нов. ост. 2	взяли 1	нов. ост. 1
полож. 2	нов. ост. 0	взяли 1	нов. ост. 2	взяли 1	нов. ост. 1

Мы нашли инвариант — после любой из операций остатки будут прежние: 0, 1, 2, только уже распределены по-другому. Если же мы сможем собрать все камни в одной кучке, то остатки при делении на 3 во всех кучках будут одинаковые (равны нулю). Следовательно, указанными операциями собрать все камни в одной из кучек нельзя.

Ответ: нет.

48. В стране Серобуромалинии живёт 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

49. На доске написаны несколько чисел. За один ход разрешается дописать на доске новое число следующим образом: если уже написаны числа a и b, то можно дописать число $ab+a+b$. Можно ли через по этому правилу через несколько ходов написать на доске число 1999, если сначала написаны числа 1 и 2?

Указание. Как изменяются остатки записываемых чисел от деления на 3?

50. У Ивана-царевича есть два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу одним махом 21 голову, а второй — 4 головы. Но если отрубить 4 головы, то у Змея Горыныча вырастает 1999 новых голов. Может ли Иван-царевич отрубить змею все головы, если у того в самом начале 100 голов?

Примечание. Рубить можно только указанное число голов. Если голов меньше 4, то ни тем, ни другим мечом их рубить нельзя.

Существует также класс задач, при решении которых используются *полуинварианты* — значения верхней или нижней границы для некоторой величины. Что это значит? Если при нахождении инварианта мы выясняем, остаётся ли некоторая величина неизменной, то при поиске полуинварианта нас заботит вопрос «не больше (или не меньше) чего должна быть интересующая нас величина?» Простейший пример: в задаче **29** рассматривается набор чисел от 1 до 1998. Первый полуинвариант — само количество чисел непрерывно уменьшается, т. е. количество чисел, написанное на доске, не может в результате разрешённой операции стать больше 1998. Второй полуинвариант — количество нечётных чисел. В результате одного шага их число либо остаётся неизменным, либо уменьшается на 2. В следующих задачах попробуйте поискать именно полуинвариант.

51. В десяти сосудах содержится 1, 2, . . . , 10 литров воды. Разрешается перелить из сосуда A в сосуд B столько воды, сколько имеется в B. Можно ли добиться, чтобы после нескольких переливаний в пяти сосудах оказалось по 3 литра, а в остальных 6, 7, 8, 9, 10 литров?

52. В клетки таблицы $m\times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце были неотрицательными.

53. Есть два больших сосуда. В одном из них — 1 л спирта, а в другом — 1 л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60-процентный раствор спирта в том сосуде, где была вода?

54. Найдите наибольшее значение произведения двух чисел a и b, сумма которых равна c.

Решение. Обозначим $x=a-c/2$, тогда $a=c/2+x$, $b=c/2-x$, а их произведение $ab=c^2/4-x^2$ принимает наибольшее значение при $x=0$, т. е. тогда, когда числа a и b равны. Получили полуинвариант: $ab\leqslant c^2/4$.

Ответ: $c^2/4$

55. Докажите, что $a^4+b^4>1/8$, если $a+b>1$.

В заключение приведём несколько задач на доказательство полезных геометрических инвариантов.

56. Для любой точки основания равнобедренного треугольника сумма расстояний от неё до боковых сторон постоянна и равна высоте, проведённой к боковой стороне.

Решение. Пусть O — произвольная точка основания равнобедренного треугольника ABC с основанием BC; h_1 и h_2 — расстояния от неё до боковых сторон. Тогда $S_{\Delta ABC}=AB\cdot h/2$, где h — высота, опущенная на боковую сторону. С другой стороны, $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABO}+S_{\Delta AOC}=$ $=AB\cdot h_1/2+AC\cdot h_2/2=AB\cdot(h_1+h_2)/2$, так как $AB=AC$. Следовательно, $h_1+h_2=h$, что и требовалось доказать.

57. Для любой точки внутри правильного треугольника сумма расстояний от неё до всех сторон постоянна и равна $(\sqrt{3}/2)a$, где a — длина стороны треугольника.

Решение аналогично решению задачи **56**: площадь всего треугольника равна $ah/2=ah_1/2+ah_2/2+ah_3/2=(a/2)(h_1+h_2+h_3)$, т. е. $h_1+h_2+h_3=h$, а в правильном треугольнике $h=(\sqrt{3}/2)a$.

Замечание. Тем же методом можно доказать, что для любой точки внутри правильного многоугольника сумма расстояний от неё до всех сторон постоянна.

58. Для любой точки на основании правильной пирамиды сумма расстояний от неё до боковых граней постоянна и равна длине высоты, опущенной на боковую грань.

Решение аналогично решению задачи **56** с тем отличием, что вместо площадей рассматриваются объёмы. Заметим также, что аналогично задаче **57** можно доказать утверждение следующей задачи.

59. Для любой точки внутри правильного многогранника сумма расстояний от неё до всех граней постоянна (в частности, для правильного тетраэдра со стороной a она равна $a\sqrt{6}/3$).

60. Из точки O на основании BC равнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры OK (на AB) и OM (на AC). Докажите, что периметр четырёхугольника $AMOK$ не зависит от выбора точки O.

61. На луче OC, проведённом внутри острого угла AOB, найдите точку с данной суммой расстояний от неё до сторон угла.

62. На окружности, проведённой внутри острого угла, найдите точку, сумма расстояний от которой до сторон угла максимальна.

63. В прямоугольный треугольник впишите прямоугольник (с общим прямым углом) наибольшей площади.

Р е ш е н и е. Введём систему координат так, как показано на рис. 8. Прямоугольник с вершинами $O(0;0)$ и $A(a/2;b/2)$ (A — середина гипотенузы) имеет площадь $S^*=ab/4$. Рассмотрим произвольный прямоугольник с противоположными вершинами O и $B(a/2+x;b/2-y)$, вписанный в данный треугольник. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{b/2+y}{b/2}=\frac{a/2+x}{a/2}$$

или $1+2y/b=1+2x/a$, откуда $y=(b/a)x$, и площадь рассматриваемого прямоугольника равна

$$S=(a/2+x)(b/2-y)=(a/2+x)(b/2-(b/a)x)=ab/4-(b/a)x^2.$$

Получаем *полуинвариант* $S\leqslant S^*$, т. е. площадь произвольного вписанного в наш треугольник прямоугольника не превышает $ab/4$. Таким образом, наибольшее значение она принимает при $x=0$, т. е. вершины искомого прямоугольника есть середины сторон заданного треугольника.

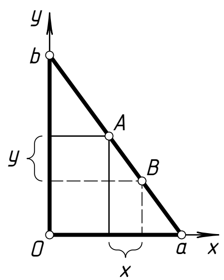

Рис. 8

64. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

65. На координатной плоскости дана точка A и прямая, проходящая через неё. Известно, что точка A лежит на гиперболе $y=k/x$, $k>0$ (сама гипербола на чертеже отсутствует), а прямая пересекает гиперболу в двух точках. С помощью циркуля и линейки постройте вторую точку.

Р е ш е н и е. Пусть прямая пересекает оси координат в точках $B(b;0)$ и $D(0;d)$, а C — искомая втораяточка пересечения прямой и гиперболы. Возможны два случая (рис. 9, *а* и *б*).

Решая систему $y=k/x$, $y=px+q$, получаем для абсцисс точек пересечения $x^2+(q/p)x-(k/p)=0$. Тогда по теореме Виета $a+c=-q/p$, $ac=-k/p$, где a и c — абсциссы точек A и C соответственно. Зная, что точки $B(b;0)$ и $D(0;d)$ лежат на прямой, получаем: $b=-q/p$ и $d=q$, т. е. $a+c=b$. Или:

$$c-0=b-a. \qquad (*)$$

Ординаты точек A и C равны k/a и k/c соответственно. Тогда $(k/a)+(k/c)=k\dfrac{a+c}{aq}=q$ или

$$\frac{k}{c}-d=0-\frac{k}{a}. \qquad (**)$$

Из соотношений $(*)$ и $(**)$ следует, что $AB=DC$. На основании полученного инварианта для получения точки C достаточно отложить на прямой от точки D отрезок, равный AB (в первую четверть, если $p<0$, и в третью четверть, если $p>0$).

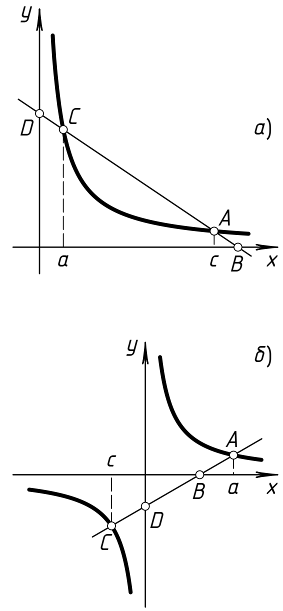

Рис. 9

66. Касательная к кривой $y=x^2-2ax$ пересекает прямую $y=-a^2$ при $x=a-b$. Найдите абсциссу точки касания.

У к а з а н и е. Докажите, что парабола $y=kx^2$ обладает следующим инвариантным свойством: абсцисса точки пересечения касательной с осью OX равна половине абсциссы точки касания.

§ 3. Метод математической индукции

Пусть имеется последовательность утверждений: A_1, A_2, ..., A_n, ... Для того чтобы доказать справедливость в с е х утверждений этой последовательности, можно поступить следующим образом:

1) доказать истинность утверждения A_1;

2) доказать, что п р и л ю б о м натуральном n из справедливости утверждения A_n следует справедливость утверждения A_{n+1}.

Такой способ рассуждений называют *методом математической индукции*. Шаг 1 называют *базой индукции*, а шаг 2 — *индукционным переходом*.

67. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Р е ш е н и е. У нас имеется последовательность утверждений:

$$A_1\colon\ 1=\frac{1\cdot 2}{2};\quad A_2\colon\ 1+2=\frac{2\cdot 3}{2};\quad A_3\colon\ 1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2};\quad \ldots$$

1) База индукции: очевидно, что утверждение A_1 верно.

2) Индукционный переход: пусть верно какое-то утверждение A_k, т. е. верно равенство $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ (предположение, что A_k верно, называется *индукционным предположением*). Докажем, что тогда верно утверждение A_{k+1}:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Но это как раз и есть утверждение A_{k+1}. В силу принципа математической индукции верны все утверждения $A_1, A_2, \ldots$, т. е. наша формула верна при любом натуральном n.

Почему же это действительно так? Почему, доказав переход от k к $k+1$, мы можем утверждать, что все утверждения верны? Давайте подумаем, почему. Действительно, в самом начале мы умеем доказывать самое первое утверждение. (В нашем примере оно очевидно, а бывает, его приходится также доказывать.) И мы знаем, как из справедливости одного какого-то утверждения можно получить справедливость следующего за ним. Значит, подставляя вместо k в нашу схему 1, мы получаем, что верно следующее за ним, а именно, второе утверждение. Т. е. у нас теперь два доказанных утверждения: первое и второе, из второго с помощью индукционного перехода получаем третье и т. д. Наш процесс похож на ряд доминошек, выстроенных друг за другом: толкнёшь одну, и все остальные падают одна за другой.

З а м е ч а н и е 1. Обращаем ваше внимание, что при выполнении индукционного перехода важно показать, что все проводимые рассуждения справедливы д л я л ю б о г о k.

З а м е ч а н и е 2. Вместо утверждения A_1 в качестве базы индукции мы могли взять, например, утверждение A_5. Тогда, выполнив индукционный переход, мы бы доказали, что исходное утверждение верно для всех натуральных n, начиная с 5.

Докажите тождества для любого натурального n.

68. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

69. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

70. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ $(n\geqslant 2)$.

71. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}$ $(n\geqslant 2)$.

72. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ $(n\geqslant 2)$.

73. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

74. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$, где $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, где $n\in\mathbb{N}$ (читается как «эн *факториал*», $n\in\mathbb{N}$). Для удобства некоторых вычислений полагают также $0!=1$.

75. Найдите ошибку в следующем доказательстве: «Докажем, что все натуральные числа равны. База индукции: любое одно число равно самому себе — верно. Пусть доказано для любых k чисел. Т. е. доказано, что любые k чисел равны между собой. Рассмотрим $k+1$ число. Если из этого множества выбросить одно из чисел, то их останется ровно k. По индукционному предположению они все равны. Заменим одно из оставшихся чисел на выброшенное ранее. Тогда снова имеем ровно k равных между собой чисел. Следовательно, все $k+1$ чисел равны между собой. Тем самым утверждение доказано».

76. Докажите, что 15^n+6 кратно 7 при любом натуральном n.

Р е ш е н и е. База индукции: $n=1$. Проверим: $15+6=21$ кратно 7. Предположим теперь, что при некотором k утверждение доказано, т. е. 15^k+6 делится на 7. Рассмотрим $15^{k+1}+6=15\cdot 15^k+6=14\cdot 15^k+$ $+(15^k+6)$: первое слагаемое делится на 7, так как 14 делится на 7, а второе делится на 7 по индукционному предположению. Следовательно, вся сумма также делится на 7. Тем самым, по принципу математической индукции исходное выражение делится на 7 при любом натуральном n.

Докажите следующие утверждения при любом натуральном n.

77. 13^n+5 кратно 6.

78. $7^{2n}-1$ кратно 24.

79. 7^n+3n-1 кратно 9.

80. $2^{3^n}+1$ кратно 3^{n-1}.

81. $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

82. На сколько частей разбивают плоскость n прямых общего положения (т. е. прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке)?

З а м е ч а н и е. В этой задаче отсутствует явная формула, которую надо доказать. Поэтому решение задачи стоит начать с выявления закономерности изменения числа частей при проведении новой прямой.

83. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)

84. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $2^n > n$.

85. При каких натуральных n выполнено неравенство:

а) $2^n > 2n+1$; б) $2^n > n^2$?

86. а) Докажите неравенство: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ при $x \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$.

б) Докажите *неравенство Бернулли*:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

если x_k одного знака и $x_k \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е. Часто неравенством или формулой Бернулли называют более известное неравенство из пункта а), которое, как легко видеть, является частным случаем неравенства Бернулли при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

87. Докажите, что для каждого натурального n, начиная с 4, существует n-угольник с тремя тупыми углами.

88. Докажите, что квадратную доску размером $2^n \times 2^n$ клеток, из которой вырезана одна угловая клетка, можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

89. Докажите, что число, записанное 3^n единицами, делится на 3^n.

90. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

Во всех предыдущих задачах справедливость базы была очевидна, и основную сложность представляло доказательство индукционного перехода. Однако в некоторых задачах, напротив, переход очевиден, а вот доказательство базы нетривиально. Рассмотрим пример такой задачи.

91. Докажите, что любые n квадратов (не обязательно одинакового размера) можно разрезать на несколько частей, из которых потом можно сложить квадрат.

В предыдущих задачах для доказательства исходного утверждения было достаточно сделать индукционное предположение об истинности лишь одного из цепочки утверждений. Иногда этого недостаточно и требуется предположение об истинности нескольких утверждений. Посмотрим, как изменится схема метода математической индукции в этом случае:

1) Б а з а и н д у к ц и и. Доказываем истинность утверждений A_p, A_{p+1}, ..., A_{p+k};

2) И н д у к ц и о н н о е п р е д п о л о ж е н и е. Пусть справедливы все утверждения A_{n-k}, ..., A_{n-1}, A_n.

3) И н д у к ц и о н н ы й п е р е х о д. Пользуясь индукционным предположением докажем, что тогда справедливо утверждение A_{n+1}.

З а м е ч а н и е 1. Поясним, почему теперь база индукции состоит не из одного утверждения, а из нескольких. Действительно, если индукционный переход мы доказываем, опираясь на истинность, например, трёх предыдущих утверждений, то зная лишь о справедливости первого утверждения, мы не сможем доказать второе и третье — не хватает уже доказанных утверждений! Поэтому приходится первые несколько утверждений доказывать отдельно, не используя индукцию.

З а м е ч а н и е 2. Не всегда из истинности утверждений A_p, A_{p+1}, ..., A_n можно сразу вывести истинность A_{n+1}, а, например, только A_{n+2}. В этом случае приходится применять несколько индукций. Например, отдельно для чётных чисел (с базой A_2 и индукционным предположением об A_{2n}, получая A_{2n+2}) и отдельно — для нечётных (с базой A_1 и индукционным предположением об A_{2n-1}, получая A_{2n+1}).

Кроме того, с помощью *двойной индукции* (т. е. индукции сначала по одному параметру, а потом по другому) можно доказывать утверждения, содержащие два натуральных параметра (см. задачу **96**).

92. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не превосходит суммы модулей этих слагаемых.

93. Докажите, что если число $a + \frac{1}{a}$ — целое, то и число $a^n + \frac{1}{a^n}$ — целое при любом натуральном n.

94. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных степеней двойки (возможно, включая нулевую).

95. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (*неравенство Коши*): для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Р е ш е н и е. База индукции: $n=2$.

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \quad \Leftrightarrow \quad (a_1+a_2)^2 \geqslant 4a_1 a_2 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1-a_2)^2 \geqslant 0,$$

что, очевидно, верно (случай $n=1$ тривиален). Пусть теперь утверждение задачи доказано для $n=2^k$. Докажем его для $n=2^{k+1}$:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}\right)\cdot\left(\frac{a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}$$

(по доказанному утверждению для $n=2$), а $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}$ по индукционному предположению (аналогично для второй скобки). Следовательно,

$$\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}}{2^k}\right)\cdot\left(\frac{a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\ldots a_{2^{k+1}}}}=\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\ldots a_{2^k}a_{2^k+1}\ldots a_{2^{k+1}}}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство для всех n, являющихся степенью двойки. Докажем для остальных. Для этого воспользуемся «*индукцией вниз*» — если доказано для n, то докажем для $n-1$. Пусть для некоторого n справедливо $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Возьмём в качестве a_n число $A=\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$. Тогда $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+A}{n}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}A}=\sqrt[n]{A^n}=A$, т. е. $(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\geqslant(n-1)A$. Разделив обе части на $(n-1)$, получим требуемое неравенство.

Замечание. Разобранную выше схему индукции часто называют «ветвящейся индукцией».

96. Докажите, что $2^{m+n-2}\geqslant mn$ при любых натуральных m и n.

97. Докажите, что среди любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n чисел, сумма которых делится на 2^n.

В следующих задачах вы столкнётесь не только с применением индукции в доказательстве, но и с определением по индукции. Например, члены некоторой последовательности, кроме нескольких первых, задаются индуктивно, т. е. через предыдущие. Так заданные последовательности называют *рекуррентными* или *возвратными*. Одной из наиболее известных рекуррентных последовательностей является ряд *чисел Фибоначчи*: $\Phi_1=1$; $\Phi_2=1$; $\Phi_n=\Phi_{n-1}+\Phi_{n-2}$, $n\geqslant3$.

98. Последовательность $\{a_n\}$ задана следующим образом: $a_1=1$; $a_2=2$; $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$. Докажите, что $a_{n+6}=a_n$ для любого натурального n.

99. Последовательность $\{a_n\}$ задана следующим образом: $a_1=3$; $a_2=5$; $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$. Докажите, что $a_n=2^n+1$ для любого натурального n.

100. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи.

В заключение суммируем всё вышесказанное. Если вы предполагаете решить задачу методом математической индукции, то:

1. Найдите в условии ряд однотипных утверждений — указанный явно или свёрнутый в выражение с переменной. Переменная может быть и замаскированной (например, задача **83**). Тогда выявите её, переформулировав условие задачи. Если такой цепочки утверждений нет, попробуйте вырастить её самостоятельно (например, задача **90**).

2. Докажите первое (или несколько первых) утверждение ряда (базу индукции).

3. Докажите, что при каждом натуральном n из справедливости n-го утверждения ряда вытекает справедливость $(n+1)$-го утверждения (индукционный переход). Возможно, справедливость $(n+1)$-го утверждения вытекает не из одного, а из нескольких предыдущих.

4. Если база и переход были доказаны, то доказаны и все утверждения ряда, так как до каждого из них можно дойти от базы несколькими шагами перехода.

Мы привели план доказательства для классического метода математической индукции. При других схемах он может несколько измениться. Например, для индукции «в отрицательном направлении» (когда рассуждения ведутся не от 1 к n, а наоборот — от какого-то числа N в сторону уменьшения — к 1, а, может быть, и далее) базой будет являться не первое, а, скажем, сотое утверждение и переход происходит не от n к $n+1$, а от n к $n-1$. Кроме того, шаг индукции может быть не обязательно целым. По мере освоения метода математической индукции вы легко сможете составить нужный план доказательства сами.