МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МОДУЛИ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
М74

М74 **Модули:** Методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / Автор-составитель А. В. Деревянкин. — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 19 с.: ил.

В разработке рассмотрены основные свойства модуля и его геометрическая интерпретация; приведены способы решения уравнений и неравенств, содержащих модули.

ББК 22.1

Модули.

Автор-составитель А. В. Деревянкин.

Редактор Е. А. Федосеева. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

§ 1. Понятие модуля. Основные свойства

Модулем, или *абсолютным значением* действительного числа a называется число, обозначаемое через $|a|$ и определяемое следующим образом:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Таким образом, модуль любого действительного числа неотрицателен. График функции $y=|x|$ изображён на рис. 1.

Примеры: $|7{,}2|=7{,}2$; $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$; $|0|=0$.

Рассмотрим некоторые свойства модулей (приведённые ниже соотношения верны для любых значений переменных).

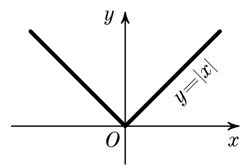


Рис. 1

1) $$|a|=|-a|;$$

2) $$|a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_n|$$

(отсюда, в частности, следует, что $|a|^2=a^2$);

3) $$|a+b|\leqslant|a|+|b|;$$

4) $$|a-b|\geqslant||a|-|b||;$$

5) $$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Справедливость свойств 1) и 2) предлагаем вам проверить самостоятельно, а доказательство свойства 3) рассмотрим подробно.

Запишем два очевидных неравенства, следующих из определения модуля:

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|;$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

Сложим их:

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

Умножим все входящие сюда выражения на -1 со сменой знака неравенств:

$$-(|a|+|b|)\leqslant-(a+b)\leqslant|a|+|b|.$$

Модуль $|a+b|$ равен либо $a+b$, либо $-(a+b)$, поэтому в любом случае $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, что и требовалось доказать.

Доказательство свойств 4) и 5) оставляем вам в качестве упражнения.

Заметим, что свойство 3) можно обобщить на случай любого числа слагаемых. Запишем это обобщение как свойство 3а).

3а) $$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

1. Решите уравнение $|x+2|=3$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая.

1) $x+2\geqslant0$. В этом случае уравнение принимает вид $x+2=3$, его решением является $x=1$. Условие $x+2\geqslant0$ для $x=1$ выполняется, поэтому найденное значение является также и корнем исходного уравнения.

2) $x+2<0$. Уравнение принимает вид $x+2=-3$, откуда $x=-5$. Несложно видеть, что и это значение является корнем исходного уравнения.

О т в е т: -5; 1.

Теперь можно записать в общем виде метод решения уравнений вида $|f(x)|=c$, где c — некоторое число. Выделим три случая.

1) $c>0$. Тогда, рассуждая, как в разобранной задаче, получим равносильный переход:

$$|f(x)|=c \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} f(x)=c,\\ f(x)=-c. \end{array}\right.$$

2) $c=0$. Поскольку модуль числа равен нулю тогда и только тогда, когда само число равняется нулю, то при $c=0$ уравнение $|f(x)|=c$ равносильно уравнению $f(x)=0$.

3) $c<0$. Так как модуль числа не может принимать отрицательных значений, при $c<0$ уравнение $|f(x)|=c$ не имеет решений.

Таким образом,

1) при $c>0$ уравнение $|f(x)|=c$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=c,\\ f(x)=-c; \end{array}\right.$$

2) при $c=0$ уравнение $|f(x)|=c$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

3) при $c<0$ уравнение $|f(x)|=c$ не имеет решений.

Рассмотрим теперь более сложную задачу, где в правой части уравнения стоит не константа, а некоторая функция, зависящая от x.

2. Решите уравнение $|2x+5|=3x-1$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая.

1) $2x+5\geqslant0$. В этом случае уравнение принимает вид $2x+5=3x-1$. Решением этого уравнения является $x=6$. Условие $2x+5\geqslant0$ для него выполняется, поэтому $x=6$ является корнем исходного уравнения.

2) $2x+5<0$. Уравнение в этом случае сводится к такому: $-(2x+5)=3x-1$, откуда $x=-\dfrac{4}{5}$. Однако для этого значения не выполнено условие $2x+5<0$, поэтому $x=-\dfrac{4}{5}$ не является корнем исходного уравнения.

О т в е т: 6.

При решении задач **1** и **2** использован приём, с помощью которого очень часто решают задачи с модулями: отдельно рассматривают несколько случаев, в каждом из которых можно однозначно раскрыть модуль.

Разобравшись с решением задачи **2**, можно записать в общем виде способ решения уравнений вида $|f(x)|=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Справедлив равносильный переход

$$|f(x)|=g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant0,\\ f(x)=g(x); \end{array}\right.\\ \left.\left\{\begin{array}{l} f(x)<0,\\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.\quad\right\}\ (1) \end{array}\right. \qquad (*)$$

Этот переход можно записать и в другом виде. Заметим, что систему (1) можно заменить системой

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant0,\\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$$

(подумайте самостоятельно, почему так можно сделать).

Выполним равносильные преобразования:

$$|f(x)|=g(x) \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant0,\\ f(x)=g(x); \end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\leqslant0,\\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x)\geqslant0,\\ f(x)=g(x); \end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} g(x)\geqslant0,\\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x); \end{array}\right.\\ g(x)\geqslant0. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$|f(x)|=g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x); \end{array}\right.\\ g(x)\geqslant0. \end{array}\right. \qquad (**)$$

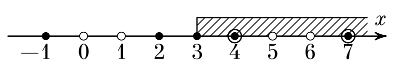
В некоторых задачах удобнее пользоваться равносильным переходом (*), а в некоторых — переходом (**). Например, решая уравнение $|x|=5x^2-12x-8$, гораздо удобнее воспользоваться переходом (*): при использовании (**) пришлось бы проверять для найденных значений выполнение неравенства $5x^2-12x-8\geqslant 0$; применяя же (*), получаем два неравенства $x\geqslant 0$ и $x<0$. Рассмотрим теперь задачу, где удобнее будет применить равносильный переход (**) (для сравнения попробуйте решить эту же задачу самостоятельно, используя (*)).

3. Решите уравнение $|x^2-6x+5|=3x-9$.

Решение.

$$|x^2-6x+5|=3x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=3x-9, \\ x^2-6x+5=-(3x-9); \end{array}\right. \\ 3x-9\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-9x+14=0, \\ x^2-3x-4=0; \end{array}\right. \\ x\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=7, \\ x=-1, \\ x=4; \end{array}\right. \\ x\geqslant 3 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=7. \end{array}\right.$$

Ответ: 4; 7.

4. Решите систему

$$\begin{cases} |x|-y=7, \\ x+2y=4. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} |x|-y=7, \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x-y=7, \\ x+2y=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ -x-y=7, \\ x+2y=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая систему

$$\begin{cases} x-y=7, \\ x+2y=4, \end{cases}$$

находим: $x=6$, $y=-1$. Полученная пара является решением исходной системы, так как выполняется условие $x\geqslant 0$. Система

$$\begin{cases} -x-y=7, \\ x+2y=4 \end{cases}$$

даёт значения $x=-18$, $y=11$. Эта пара также является решением исходной системы, так как выполняется условие $x<0$.

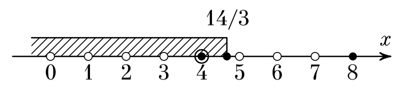
Ответ: $(6; -1)$; $(-18; 11)$.

5. Решите уравнение $\sqrt{4x^2-24x+36}=14-3x$.

Решение. $\sqrt{4x^2-24x+36}=\sqrt{(2x-6)^2}=|2x-6|$. Таким образом, исходное уравнение можно записать в виде $|2x-6|=14-3x$. Решим полученное уравнение:

$$|2x-6|=14-3x \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-6=14-3x, \\ 2x-6=-(14-3x); \end{array}\right. \\ 14-3x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=8; \end{array}\right. \\ x\leqslant \dfrac{14}{3} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \quad x=4.$$

Ответ: 4.

Рассмотрим, как решаются уравнения вида $|f(x)|=|g(x)|$. Заметим, что модули чисел a и b равны в одном из двух случаев: $a=b$ или $a=-b$. Таким образом, имеет место следующий равносильный переход:

$$|f(x)|=|g(x)| \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

6. Решите уравнение $|x^2+4x+13|=|x^2+9x+8|$.

Решение.

$$|x^2+4x+13|=|x^2+9x+8| \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x+13=x^2+9x+8, \\ x^2+4x+13=-(x^2+9x+8) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-5=0, \\ 2x^2+13x+21=0. \end{array}\right.$$

Решим квадратное уравнение: $D=13^2-4\cdot 2\cdot 21=1$, $x_{1,2}=\dfrac{-13\pm 1}{2\cdot 2}$, $x_1=-\dfrac{7}{2}$, $x_2=-3$. Решением линейного уравнения является $x_3=1$.

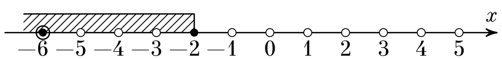
Ответ: $-\dfrac{7}{2}$; -3; 1.

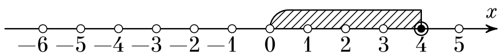
7. Решите уравнение $|x+2|+|x|+|5-x|=|x-4|+11$.

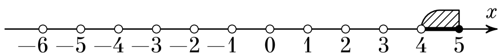
Решение. Разобьём числовую ось на пять промежутков $(-\infty; -2]$, $(-2; 0]$, $(0; 4]$, $(4; 5]$, $(5; +\infty)$. На каждом из этих промежутков функции $y=x+2$, $y=x$, $y=5-x$, $y=x-4$ не меняют своего знака, что даёт возможность раскрыть знаки модуля: например, при $x\in(-\infty; -2]$ справедливы неравенства $x+2\leqslant 0$, $x\leqslant 0$, $5-x\geqslant 0$, $x-4\leqslant 0$, поэтому $|x+2|=-(x+2)$, $|x|=-x$, $|5-x|=5-x$, $|x-4|=-(x-4)$. Проведя аналогичные рассуждения для остальных промежутков, получим:

$$|x+2|+|x|+|5-x|=|x-4|+11 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant -2, \\ -(x+2)-x+(5-x)=-(x-4)+11; \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x\leqslant 0, \\ (x+2)-x+(5-x)=-(x-4)+11; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x\leqslant 4, \\ (x+2)+x+(5-x)=-(x-4)+11; \end{cases} \\ \begin{cases} 4<x\leqslant 5, \\ (x+2)+x+(5-x)=(x-4)+11; \end{cases} \\ \begin{cases} x>5, \\ (x+2)+x-(5-x)=(x-4)+11 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant -2, \\ x=-6; \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x\leqslant 0, \\ -x+7=-x+15; \end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases} 0<x\leqslant 4, \\ x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} 4<x\leqslant 5, \\ x+7=x+7; \end{cases} \\ \begin{cases} x>5, \\ x=5 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ 4\leqslant x\leqslant 5. \end{array}\right.$$







О т в е т: $\{-6\}\cup[4;5]$.

Способ, применённый при решении задачи **7**, — рассмотрение промежутков, на которых функции, стоящие под знаком модуля, не меняют своего знака, — очень распространён. Зачастую его использование — это единственная возможность решить уравнение или неравенство, содержащее несколько знаков модуля.

8. Решите уравнение $(x+2)^2-3|x+2|-28=0$.

Р е ш е н и е. Можно было бы поступить стандартным способом, рассмотрев два случая ($x+2\geqslant 0$, $x+2<0$), решив получающееся в каждом из них уравнение и т. д., а можно произвести замену $y=|x+2|$. Поскольку $(x+2)^2=|x+2|^2$, то уравнение примет вид $y^2-3y-28=0$. Решая его, находим: $y=-4$, $y=7$. Но уравнение $|x+2|=-4$ не имеет решений; таким образом, $|x+2|=7$, откуда $x=-9$ или $x=5$.

О т в е т: -9; 5.

9. Решите уравнение $a|x|=x+2$.

Р е ш е н и е.

$$a|x|=x+2 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax=x+2, \\ x\geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -ax=x+2, \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-1)x=2, \\ x\geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (a+1)x=-2, \\ x<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $a\neq\pm 1$. Оба получившихся уравнения имеют решения, и в этом случае система преобразуется к такой:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2}{a-1}, \\ x\geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{2}{a+1}, \\ x<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

При $a>1$ имеем: $\dfrac{2}{a-1}>0$, $-\dfrac{2}{a+1}<0$, поэтому оба этих значения являются решениями уравнения. Несложно проверить, что при $-1<a<1$ решением уравнения является только $-\dfrac{2}{a+1}$, а при $a<-1$ ни одно из значений $\dfrac{2}{a-1}$, $-\dfrac{2}{a+1}$ не подходит.

2) $a=1$. Уравнение $(a-1)x=2$ решений не имеет, а решением уравнения $(a+1)x=-2$ является $x=-1$, условие $x<0$ при этом выполнено.

3) $a=-1$. Уравнение $(a+1)x=-2$ решений не имеет, а уравнение $(a-1)x=2$ имеет корень $x=-1$. Однако, условие $x\geqslant 0$ для него не выполнено, поэтому при $a=-1$ у исходного уравнения решений нет.

Заметим, что случай $a=1$ можно включить в случай $-1<a<1$, поскольку решение при $a=1$ выражается формулой $x=-\dfrac{2}{a+1}$.

О т в е т: при $a\leqslant -1$ нет решений;

при $-1<a\leqslant 1$ $\quad -\dfrac{2}{a+1}$;

при $a>1$ $\quad \dfrac{2}{a-1}$, $-\dfrac{2}{a+1}$.

10. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое равенством $|y-x|=y$.

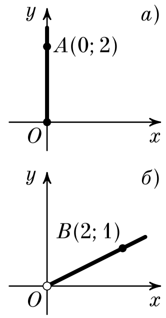


Рис. 2

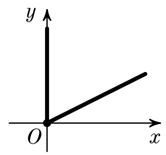


Рис. 3

Р е ш е н и е.

$$|y-x|=y \iff \left[\begin{cases} y-x=y,\\ y-x\geqslant 0;\end{cases}\right. \atop \left.\begin{cases} -(y-x)=y,\\ y-x<0\end{cases}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0,\\ y\geqslant x;\end{cases}\\ \begin{cases} x=2y,\\ x>y\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0,\\ y\geqslant x;\end{cases}\\ \begin{cases} x=2y,\\ 2y>y\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=0,\\ y\geqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases} x=2y,\\ y>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система задаёт на координатной плоскости луч OA (рис. 2, *а*); вторая — луч OB с выколотой начальной точкой (рис. 2, *б*). Искомое множество является объединением этих лучей.

О т в е т: см. рис. 3.

Упражнения

11. Какие значения может принимать выражение $|x|/x$?

12. Как записать без знака модуля выражения: а) $|a^2|$; б) $|a-b|$, если $a>b$; в) $|a-b|$, если $a<b$; г) $|-a|$, если a — отрицательное число?

13. а) Докажите, что минимальное из двух чисел a и b равно $\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$. б) Предложите подобную формулу для поиска м а к с и м а л ь н о г о из двух чисел a, b и докажите её справедливость.

Решите уравнения (**14**—**18**).

14. а) $|x-8|=2$; б) $|2x+5|=0$; в) $\left|-3x+\frac{7}{6}\right|=-14$;
г) $|x^2-x-4|=2$; д) $|20x-5-2x^2|=27$; е) $|9-2x^2-x|=6$.

15. а) $||3-2x|-5|=4$; б) $|2-|1-x||=4$; в) $||x+8|-7|=7$.

16. а) $|2x-3|=-\frac{x-9}{2}$; б) $\left|\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right|=x-1$;
в) $|2x+3|-x=6$; г) $|3x-30|+2=x$.

17. а) $|x^2+2x-8|=x+8$; б) $|x^2-6x+5|+2x=10$;
в) $x^2+4x+|x+3|+3=0$; г) $x^2+17=9x+4|3-x|$;
д) $x^2+2x=2|x+1|+7$; е) $(x+4)^2-7|x+5|-18=0$;
ё) $x^2-4x+3=|x^2-6x-3|$; ж) $|x^2-3x-4|=|7+5x-2x^2|$;
з) $(x-1)^2-5|x-1|=24$; и) $|x^2+4x-5|+|2-2x^2|=0$.

18. а) $x|x|+x-2=2|x|$; б) $|x-3|+|x-4|=2x+1$;
в) $|5x-7|=|7x-10|-2x+3$;
г) $\sqrt{4x^2+20x+25}-\sqrt{9x^2-24x+16}=3-2x$;
д) $||x|-2|=x$; е) $|x-3-|x||=4$; ё) $|x-1|+|2x+5|+|x+4|=7$;
ж) $|4x-1|-|2x-3|+|x-2|=0$; з) $||x-1|-|x+2||=|x+3|+5$;
и) $|x-1|-|x+2|-|2x-5|+|3-x|=-3$;
й) $|||x|-2|-1|-2|=2$; к) $|2-|1-|x|||=1$.

19. Решите уравнения с параметром:
а) $|x+3|=a$; б) $|x|=ax-3$;
в) $x^2-(a+1)|x|+a=0$; г) $|4x-x^2-5|=1-a^2$.

20. Определите, сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+1|=ax$.

21. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|6x|-a=x^2$ имеет два решения.

Решите системы (**22**—**24**).

22. а) $\begin{cases} y-x=1,\\ x+|y|=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=4,\\ 3|1-y|-x=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases} x+|y|=2,\\ 3x+|y|=4;\end{cases}$
г) $\begin{cases} 3|x|+2y=1,\\ 2|x|-y=3;\end{cases}$ д) $\begin{cases} x+y=3,\\ |3x-y+1|=1;\end{cases}$ е) $\begin{cases} x+2y=2,\\ |2x-3y|=1.\end{cases}$

23. а) $\begin{cases} |x-2|+|y-5|=1,\\ y-|x-2|=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-1|+y=4,\\ x-|y-2|=3;\end{cases}$
в) $\begin{cases} |x+2|+|y|=2,\\ y+2=|x+2|;\end{cases}$ г) $\begin{cases} |x-3|+|y-2|=3,\\ y+|x-3|=5.\end{cases}$

24. а) $\begin{cases} x+y=1,\\ a|x|-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases} ax-|x|+y=2,\\ x+ay=a+1.\end{cases}$

25. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет единственное решение:
а) $\begin{cases} 3|x|+y=2,\\ |x|+2y=a;\end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=a,\\ y-|x|=2;\end{cases}$ в) $\begin{cases} ax-y=3a,\\ y-|x|=1.\end{cases}$

26. Изобразите на координатной плоскости множества точек, задаваемые равенствами:
а) $|x-y|=1$; б) $|x|=y^2$; в) $|x|+|y|=4$;
г) $||x|-|y||=1$; д) $|3y+2x-2|=|x-y+3|$; е) $|y|=x^2-4|x|+3$.

27. Даны числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{99}, x_{100}$, причём $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{99}<x_{100}$. Найдите минимальное значение суммы

$$|x-x_1|+|x-x_2|+|x-x_3|+\ldots+|x-x_{99}|+|x-x_{100}|.$$

28. Даны числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}, x_{1001}$, причём $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{999}<x_{1000}<x_{1001}$. Сколько решений может иметь уравнение

$$|x-x_1|+|x-x_2|+|x-x_3|+\ldots+|x-x_{1000}|+|x-x_{1001}|=c?$$

29. Сколько решений имеет уравнение

$$\left|\left|\left|\left|\left|\left|\left||x|-128\right|-64\right|-32\right|-16\right|-8\right|-4\right|-2\right|-1\right|=\frac{1}{2}+\frac{x}{256}?$$

§ 2. Неравенства с модулями

Приведём методы решения неравенств вида

$$|f(x)|\geqslant g(x),\qquad |f(x)|\leqslant g(x),$$
$$|f(x)|> g(x),\qquad |f(x)|< g(x).$$

I. $|f(x)|\geqslant g(x)$

Рассмотрим два случая.

1) $g(x)>0$. Раскроем модуль:

$$|f(x)|\geqslant g(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ f(x)\geqslant g(x);\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)\geqslant g(x)\end{cases}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}f(x)\geqslant 0, & (1)\\ f(x)\geqslant g(x); & (2)\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0, & (3)\\ f(x)\leqslant -g(x). & (4)\end{cases}\end{array}\right.$$

По предположению $g(x)>0$, поэтому неравенство (1) автоматически следует из (2), а неравенство (3) — из (4). Таким образом, неравенства (1) и (3) можно убрать из систем с сохранением равносильности, и при $g(x)>0$ неравенство $|f(x)|\geqslant g(x)$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}f(x)\geqslant g(x),\\ f(x)\leqslant -g(x).\end{array}\right. \tag{5}$$

2) $g(x)\leqslant 0$. В этом случае неравенство $|f(x)|\geqslant g(x)$ выполняется при всех значениях x, так как $|f(x)|\geqslant 0$ по определению модуля. Заметим, что и совокупность (5) также справедлива при всех x, для которых $g(x)\leqslant 0$ (значения x, при которых $f(x)\geqslant 0$, удовлетворяют неравенству $f(x)\geqslant g(x)$; значения x, при которых $f(x)<0$, удовлетворяют неравенству $f(x)\leqslant -g(x)$). Получаем, что и в случае $g(x)\leqslant 0$ неравенство $|f(x)|\geqslant g(x)$ равносильно совокупности (5).

Таким образом,

$$|f(x)|\geqslant g(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}f(x)\geqslant g(x),\\ f(x)\leqslant -g(x).\end{array}\right.$$

Подобным образом получают равносильное преобразование и для строгого неравенства:

$$|f(x)|> g(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}f(x)> g(x),\\ f(x)< -g(x).\end{array}\right.$$

30. Решите неравенство $x^2-6x+2<3|x-2|$.

Р е ш е н и е.

$$x^2-6x+2<3|x-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3(x-2)>x^2-6x+2,\\ 3(x-2)<-(x^2-6x+2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-9x+8<0,\\ x^2-3x-4<0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)(x-8)<0,\\ (x+1)(x-4)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<8,\\ -1<x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\quad -1<x<8.$$

О т в е т: $(-1;8)$.

II. $|f(x)|\leqslant g(x)$

Рассмотрим два случая.

1) $g(x)\geqslant 0$. Раскроем модуль и выполним равносильные преобразования:

$$|f(x)|\leqslant g(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ f(x)\leqslant g(x);\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)\leqslant g(x)\end{cases}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}0\leqslant f(x)\leqslant g(x),\\ -g(x)\leqslant f(x)<0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x).$$

.

2) $g(x)<0$. В этом случае неравенство $|f(x)|\leqslant g(x)$ не имеет решений, как и двойное неравенство $-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, т. е. при $g(x)<0$, как и при $g(x)\geqslant 0$, эти неравенства равносильны. Таким образом,

$$|f(x)|\leqslant g(x)\quad\Leftrightarrow\quad -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x).$$

Аналогично,

$$|f(x)|< g(x)\quad\Leftrightarrow\quad -g(x)< f(x)< g(x).$$

(отметим, что это неравенство, в отличие от нестрогого, не будет иметь решений и при $g(x)=0$).

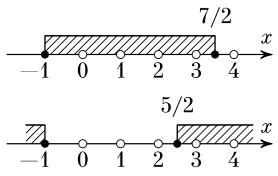
31. Решите неравенство $|x^2-2x-3|\leqslant\dfrac{x+1}{2}$.

Р е ш е н и е.

$$|x^2-2x-3|\leqslant\frac{x+1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x^2-4x-6\leqslant x+1,\\ 2x^2-4x-6\geqslant -(x+1)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2x^2-5x-7\leqslant 0,\\ 2x^2-3x-5\geqslant 0.\end{cases}$$

Решим квадратные неравенства. 1) $2x^2-5x-7\leqslant 0$, $D=5^2+4\cdot 2\cdot 7=81$, $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\dfrac{5\pm 9}{4}$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{7}{2}$; 2) $2x^2-3x-5\geqslant 0$, $D=3^2+4\cdot 2\cdot 5=49$, $x_{3,4}=\dfrac{3\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 7}{4}$, $x_3=-1$, $x_4=\dfrac{5}{2}$. Итак, получаем:

$$\begin{cases} 2x^2-5x-7\leqslant 0,\\ 2x^2-3x-5\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1\leqslant x\leqslant \dfrac{7}{2};\\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -1,\\ x\geqslant \dfrac{5}{2}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\\ \dfrac{5}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{7}{2}.\end{array}\right.$$



О т в е т: $\{-1\}\cup\left[\dfrac{5}{2};\ \dfrac{7}{2}\right]$.

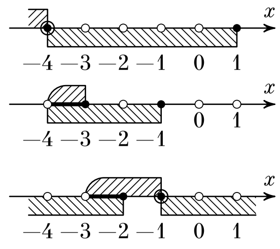
32. Решите неравенство $|x+4|+|x^2+4x+3|\leqslant 3$.

Р е ш е н и е. Применим способ, использованный при решении задачи **7**. Найдём значения x, при которых выражения, стоящие под модулем, обращаются в ноль: 1) $x+4=0$, $x_1=-4$; 2) $x^2+4x+3=0$, $\dfrac{D}{4}=2^2-3=1$, $x_{2,3}=-2\pm 1$, $x_2=-3$, $x_3=-1$.

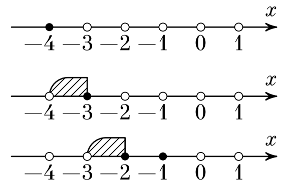
Таким образом, числовую ось можно разбить на четыре промежутка $(-\infty;\ -4]$, $(-4;\ -3]$, $(-3;\ -1]$, $(-1;\ +\infty)$, на каждом из которых функции $y=x+4$ и $y=x^2+4x+3$ не меняют знака. Это даёт нам возможность раскрыть модули на каждом из этих промежутков. Например, при $x\in(-\infty;\ -4]$ имеем: $x+4\leqslant 0$, $x^2+4x+3\geqslant 0$, поэтому $|x+4|=-(x+4)$, $|x^2+4x+3|=x^2+4x+3$. Проводя аналогичные рассуждения для других промежутков, получаем:

$$|x+4|+|x^2+4x+3|\leqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant -4,\\ -(x+4)+x^2+4x+3\leqslant 3;\end{cases}\\ \begin{cases} -4<x\leqslant -3,\\ x+4+x^2+4x+3\leqslant 3;\end{cases}\\ \begin{cases} -3<x\leqslant -1,\\ x+4-(x^2+4x+3)\leqslant 3;\end{cases}\\ \begin{cases} x>1,\\ x+4+x^2+4x+3\leqslant 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant -4,\\ x^2+3x-4\leqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases} -4<x\leqslant -3,\\ x^2+5x+4\leqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases} -3<x\leqslant -1,\\ x^2+3x+2\geqslant 0;\end{cases}\\ \begin{cases} x>1,\\ x^2+5x+4\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant -4,\\ -4\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}\\ \begin{cases} -4<x\leqslant -3,\\ -4\leqslant x\leqslant -1;\end{cases}\\ \begin{cases} -3<x\leqslant -1;\\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -2,\\ x\geqslant -1;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} x>1,\\ -4\leqslant x\leqslant -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4;\\ -4<x\leqslant -3;\\ \left[\begin{array}{l} -3<x\leqslant -2,\\ x=-1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\leqslant x\leqslant -2,\\ x=-1.\end{array}\right.$$



О т в е т: $[-4;\ -2]\cup\{-1\}$.

33. Изобразите на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством

$$|x|+|y|<2y+1.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим, в зависимости от знаков x и y, несколько случаев.

I. $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Неравенство принимает вид $x+y<2y+1$, или

$$y>x-1.$$

Множеством точек, удовлетворяющих этому неравенству, является часть плоскости, расположенная над прямой $y=x-1$. С учётом ограничений $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ сделаем чертеж (рис. 4, *а*; отметим, что прямая $y=x-1$ не входит в это множество, поэтому изображена пунктиром).

II. $x\geqslant 0$, $y<0$. Раскроем модули: $x-y<2y+1$, т. е.

$$y>\frac{x-1}{3}.$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству и условиям $x\geqslant 0$, $y<0$, изображено на рис. 4, *б*.

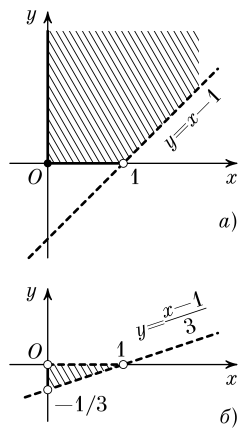


Рис. 4

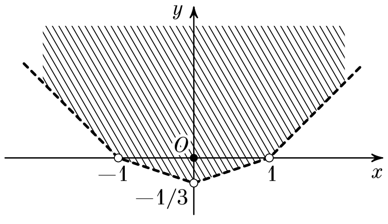


Рис. 5

Заметим, что искомое множество является симметричным относительно оси Oy (если точка $(x;y)$ принадлежит этому множеству, то и точка $(-x;y)$ также ему принадлежит, так как $|x|+|y|=|-x|+|y|$). Часть этого множества, расположенная в правой полуплоскости, уже построена в пунктах I и II. Таким образом, чтобы получить часть из левой полуплоскости, надо отразить симметрично относительно оси Oy области, изображённые на рис. 4, *а* и *б*. Объединение всех полученных областей и есть искомое множество.

Ответ: см. рис. 5.

Упражнения

Решите неравенства (**34**, **35**).

34. а) $|x^2+2x|>3$;	б) $|x-4|>2x-1$;
в) $|x^2+4x-2|\geqslant x+8$;	г) $|x^2-x-6|>3+x$;
д) $|3x^2-4x-2|<2$;	е) $3|x-3|\leqslant x+1$;
ё) $\left|2x^2-2x-\frac{15}{2}\right|\leqslant 5-2x$;	ж) $|x^2-6x+8|\leqslant 5x-x^2$;
з) $|x^2-1|<|x+1|$;	и) $|x^2-3x+2|\geqslant|x^2+3x+2|$.

35. а) $|x+1|<3x-|x-2|$;	б) $|x+2|-|x-3|\geqslant 2x-1$;
в) $(2x+3)^2-|2x+3|\leqslant 30$;	г) $11|x|+20-3x^2>0$;
д) $x^2-6x-|x-3|+7\geqslant 0$;	е) $|x+2|+|x+1|+|x-4|>9$;
ё) $||2x^2-x|-3|\leqslant 2x^2+x+5$;	ж) $||x-3|-2|\leqslant 1$;
з) $||3x-4|-5|>1$;	и) $||3x-1|-|2x+1||>x$;
й) $|x^2-|x^2+x||>11$;	к) $|x^2-4x+3|+2<2|x-1|+|x-3|$.

36. Решите систему

$$\begin{cases}|x-1|<9-2x,\\ |x-5|+|x-6|+|x-7|>15.\end{cases}$$

37. Изобразите на координатной плоскости множества точек, задаваемые неравенствами:

а) $|x|\leqslant 2$;	б) $|x+y|\geqslant 3$;	в) $|x|+2|y|\leqslant 4$;
г) $|y+2|\leqslant 2x+3$;	д) $|y|<|x^2-8x+7|$;	е) $|x|y>2$.

§ 3. Модуль как расстояние на числовой прямой (геометрическая интерпретация модуля)

Как известно, каждое действительное число изображается определённой точкой на числовой оси. Расстояние от точки, соответствующей числу a, до начала координат равно $|a|$. Это частный случай более общего утверждения: расстояние между точками с координатами a и b равно $|a-b|$. Некоторые задачи с модулями можно решить, используя понятие расстояния. Для примера решим таким образом задачу **1**.

Решение задачи **1**. Переформулируем условие задачи в терминах расстояний. Поскольку $|x+2|=|x-(-2)|$, то значение этого модуля равно расстоянию от точки с координатой x до точки с координатой -2. Таким образом, требуется найти координаты всех точек числовой оси, удалённых от точки с координатой -2 на расстояние 3. Таких точек две; их координаты равны -5 и 1 (рис. 6).

Ответ: -5; 1.

38. Решите уравнение $|x-3|+|x+5|=10$.

Решение. Поскольку $|x+5|=|x-(-5)|$, то данная задача равносильна такой: найти координаты всех точек X, сумма расстояний от которых до точек A и B равна 10, где A имеет координату -5, B — координату 3. Запишем соответствующее равенство: $AX+BX=10$. Рассмотрим три случая:

1) Точка X лежит на отрезке AB (возможно, совпадая с одним из его концов; рис. 7, *а*). В этом случае $AX+BX=AB=8$ — следовательно, точки отрезка AB нам не подходят.

2) Точка X лежит левее точки A (рис. 7, *б*). Тогда $AX+BX=AX+(BA+AX)=$ $=8+2AX=10$, откуда $AX=1$, и точка X имеет координату -6.

3) Точка X лежит правее точки B (рис. 7, *в*). Рассуждая аналогично, находим, что $BX=1$, и координата точки X равна 4.

Ответ: -6; 4.

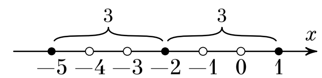


Рис. 6

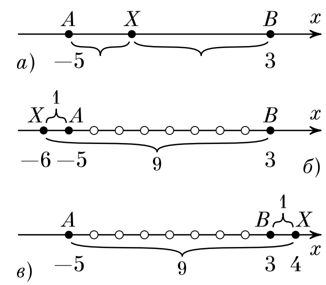


Рис. 7

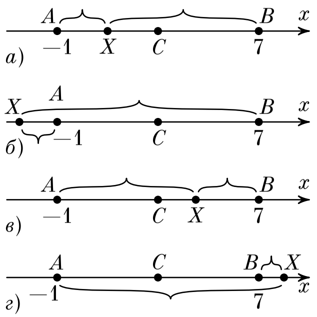


Рис. 8

Заметим, что эту задачу, конечно, можно было решить и способом, описанным в § 1, рассмотрев три промежутка $(-\infty; -5]$, $(-5; -3]$, $(3; +\infty)$ и раскрыв на каждом из них знаки модуля. Сравнивая два способа решения подобных задач, можно заметить следующее: как правило, геометрическая интерпретация более наглядна, но решение путём разбиения числовой оси на промежутки и раскрытия знаков модуля на этих промежутках удобнее для записи.

39. Решите неравенство $|x-7| \geqslant |x+1|$.

Р е ш е н и е. Обозначим точку с координатой -1 через A; точку с координатой 7 — через B. Переведём эту задачу в термины расстояний: необходимо найти множество всех точек числовой оси X таких, что $BX \geqslant AX$. Середина C отрезка AB удовлетворяет этому неравенству, равно как и все точки, лежащие левее C (рис. 8, *а*, *б*); в то же время все точки, расположенные правее C, этому неравенству не удовлетворяют (рис. 8, *в*, *г*). Таким образом, множество решений неравенства $BX \geqslant AX$ образует луч с началом в точке C, направленный влево. Координата точки C равна $\dfrac{-1+7}{2}=3$; таким образом, множеством решений исходного неравенства является промежуток $(-\infty; 3]$.

О т в е т: $(-\infty; 3]$.

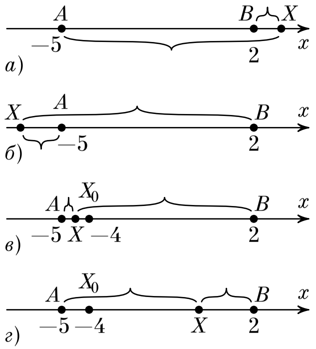


Рис. 9

40. Решите неравенство $|x-2|-|x+5|>5$.

Р е ш е н и е. Рассуждая так же, как и при решении задачи **38**, получим, что требуется найти множество точек X таких, что $BX-AX>5$, где точка A имеет координату -5, точка B — координату 2. Точка X не может лежать правее B, так как в этом случае

$$BX-AX=BX-(AB+BX)=-AB=-7$$

(рис. 9, *а*). Для всех точек X, лежащих левее A, выполнено

$$BX-AX=(BA+AX)-AX=BA=7>5$$

(рис. 9, *б*), поэтому координаты этих точек удовлетворяют условию. Наконец, рассмотрим точки отрезка AB. Равенство $BX-AX=5$ достигается для точки $X_0(-4)$. Несложно проверить, что для любой точки X отрезка AB, отличной от X_0, верно неравенство $BX-AX>5$, если X находится левее точки X_0 (рис. 9, *в*), и неравенство $BX-AX<5$, если X находится правее точки X_0 (рис. 9, *г*). Таким образом, условию задачи удовлетворяют те и только те точки, которые

1) находятся левее точки $A(-5)$ (т. е. $x<-5$);

2) лежат на отрезке AB левее точки $X_0(-4)$ (т. е. $-5 \leqslant x < -4$).

Объединяя найденные промежутки, получаем: $x<-4$.

О т в е т: $(-\infty; -4)$.

Упражнения

41. Решите уравнения:

а) $|x-2|+|x+5|=9$; б) $|x-2|+|x+5|=7$; в) $|x-2|+|x+5|=2$;
г) $|x-2|-|x+5|=9$; д) $|x-2|-|x+5|=7$; е) $|x-2|-|x+5|=2$.

42. Решите неравенства:

а) $|x-6|+|x+2| \geqslant 12$; б) $|x-6|+|x+2|>8$; в) $|x-6|+|x+2|<4$;
г) $|x-6|-|x+2|<12$; д) $|x-6|-|x+2| \leqslant 8$; е) $|x-6|-|x+2| \geqslant 4$.

43. Решите уравнения:

а) $|7x^2-x-3|+|7x^2-x-5|=4$; б) $|-x^2+10x-24|-|x^2-10x+16|=8$.

44. Для каждого значения параметра a решите системы:

а) $\begin{cases} |x-5| \leqslant a, \\ |x-2| \geqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |3-2x|>a+1, \\ |x^2-3| \geqslant 5. \end{cases}$

45. Решите неравенства:

а) $|x+6|<|4-x|$; б) $|8-2x|>9$; в) $|3x-5| \leqslant 1$;
г) $|x^2+2x-10| \leqslant |x^2+2x-8|$; д) $|1+4x-x^2|<4$;
е) $|x^2-2x-4| \geqslant 4$; ё) $|x^2-10x-9|<30$; ж) $||x|-4| \geqslant 4$;
з) $||x-1|-|3-x||<1$.

46. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4x+4}=a-\sqrt{x^2+6x+9}$.

47. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|x^2-ax+22|-|x^2-ax+8|=12$$

имеет единственное решение.

48. Решите уравнение $|x^3-1|+|2-x^3|=1$.

49. Докажите, что при любых значениях a справедливы неравенства: а) $|a-2|+|a-7| \geqslant 5$; б) $|a-1|+|a-2|+|a-3| \geqslant 2$.