МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕТОД КООРДИНАТ

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
М54

М54 **Метод** координат: Методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / Автор-составитель Е. Т. Шавгулидзе. — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 32 с.: ил.

В разработке излагаются основные понятия метода координат и теории векторов на плоскости и в пространстве с приложениями к задачам алгебры и геометрии.

ББК 22.1

Методическая разработка составлена на основе книги И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и А. А. Кириллова «Метод координат». — М.: Наука, 1964. — (Библиотека физико-математической школы; вып. 1).

Метод координат.

Автор-составитель Е. Т. Шавгулидзе.

Редактор А. В. Деревянкин. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ

§ 1. Числовая ось. Чтобы задать положение точки на прямой, поступают следующим образом. На прямой выбирают начало отсчёта (некоторую точку O), единицу масштаба (отрезок e) и направление, которое будет считаться положительным. (На рис. 1 оно указано стрелкой.)

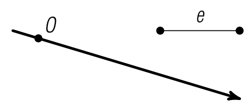

Рис. 1

Прямая, на которой указаны начало отсчёта, единица масштаба и положительное направление, называется *числовой осью*.

Для определения положения точки на числовой оси достаточно назвать одно число, например, $+5$. Это означает, что точка лежит на расстоянии 5 единиц масштаба от начала отсчёта в положительном направлении.

Число, определяющее положение точки на числовой оси, называется *координатой* точки по этой оси.

Координата точки на числовой оси равна расстоянию от этой точки до начала отсчёта, выраженному в единицах масштаба и взятому со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении от начала, и со знаком минус, если в отрицательном направлении. Начало отсчёта часто называют началом координат. Координата начала отсчёта (точки O) равна нулю.

Употребляют обозначения $M(-7)$, $A(x)$ и т. д. Первая из этих записей обозначает точку M с координатой минус семь, вторая — точку A с координатой x.

Проверьте себя. Если вы правильно поняли § 1, то вы без труда справитесь с упражнениями, которые мы вам предлагаем. Если же упражнения у вас не получаются, это значит, что вы что-то пропустили или не поняли. В таком случае перечитайте этот параграф.

Упражнения

1. а) Нарисуйте на числовой оси точки $A(-2)$, $B(13/3)$, $K(0)$.

б) На числовой оси нарисуйте точку $M(2)$. Найдите на числовой оси две точки A и B, находящиеся от точки M на расстоянии в три единицы. Чему равны координаты точек A и B?

2. а) Известно, что точка $A(a)$ лежит правее*) точки $B(b)$. Какое число больше: a или b?

б) Не рисуя точек на числовой оси, скажите, какая из двух точек правее: $A(-3)$ или $B(-4)$, $A(3)$ или $B(4)$, $A(-3)$ или $B(4)$, $A(3)$ или $B(-4)$?

3. Какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(-a)$?

4. Какая из двух точек правее: а) $M(x)$ или $N(2x)$; б) $A(c)$ или $B(c+2)$; в) $A(x)$ или $B(x-a)$; г) $A(x)$ или $B(x^2)$?

5. Нарисуйте на числовой оси точки $A(-5)$ и $B(7)$. Найдите координату середины отрезка AB.

6. Отметьте на числовой оси множество точек, координаты которых а) целые числа; б) положительные числа.

7. Отметьте на числовой оси множество точек x, для которых: а) $x<2$; б) $x\geqslant 5$; в) $2<x<5$; г) $-3\frac{1}{4}<x\leqslant 0$.

§ 2. Абсолютная величина числа. *Абсолютной величиной* числа x (или *модулем* числа x) называют расстояние от точки $A(x)$ до начала координат.

Модуль числа x обозначают прямыми скобками: $|x|$. Например, $|-3|=3$, $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Из определения следует, что

$$\text{если } x>0, \text{ то } |x|=x,$$
$$\text{если } x<0, \text{ то } |x|=-x,$$
$$\text{если } x=0, \text{ то } |x|=0.$$

Так как точки a и $-a$ расположены на одинаковом расстоянии от начала координат, то у чисел a и $-a$ одинаковая абсолютная величина: $|a|=|-a|$.

Упражнения

8. Какие значения может принимать выражение $|x|/x$?

9. Как записать без знака модуля выражения: а) $|a^2|$; б) $|a-b|$, если $a>b$; в) $|a-b|$, если $a<b$; г) $|-a|$, если a — отрицательное число?

10. Известно, что $|x-3|=x-3$. Каким может быть x?

11. Где на числовой оси лежат точки x, для которых а) $|x|=2$; б) $|x|>3$; в) $|x|\leqslant 5$; г) $3<|x|<5$?

д) Укажите, где лежат точки, для которых $|x-2|=2-x$.

Решение пункта б). Если x — положительное число, то $|x|=x$, следовательно, $x>3$; если x — отрицательное число, то $|x|=-x$, тогда из неравенства $-x>3$ следует, что $x<-3$.

*) Здесь и далее предполагается, что ось расположена горизонтально и положительным направлением является направление слева направо.

Ответ. б) Все точки, расположенные левее точки -3, и все точки, расположенные правее точки 3. Этот ответ можно получить и быстрее, если учесть, что $|x|$ — это расстояние точки x от начала координат. Тогда ясно, что искомые точки расположены на расстоянии, большем чем 3, от начала координат (рис. 2).

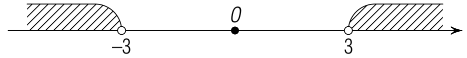

Рис. 2

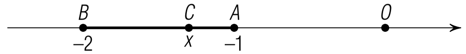

Рис. 3

12. Решите уравнения:
а) $|x-2|=3$; б) $|x+1|+|x+2|=1$.

Ответ. б) Уравнение имеет бесконечно много решений: совокупность этих решений заполняет отрезок $-2\leqslant x\leqslant -1$, т. е. любое число, которое больше или равно -2 и меньше или равно -1, удовлетворяет уравнению. Геометрически это означает, что для любой точки $C(x)$ отрезка AB (где точки A и B имеют координаты -1 и -2 соответственно) сумма расстояний до точек A и B равна 1: $AC+BC=|x+1|+|x+2|=1$ (рис. 3); а для точек C, лежащих вне отрезка AB, очевидно, что $AC+BC>AB=1$.

§ 3. Расстояние между двумя точками. Начнём с упражнения.

13. Найдите расстояние между точками а) $A(-7)$ и $B(-2)$; б) $A\left(3\frac{1}{2}\right)$ и $B(-9)$.

Теперь мы предлагаем вам вывести общую формулу для расстояния между двумя точками на числовой оси, т. е. решить такую задачу:

14. Даны точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Определите расстояние $\rho(A, B)$ между этими точками*).

Решение. Так как теперь конкретные значения координат точек неизвестны, надо разобрать все возможные случаи взаимного расположения трёх точек A, B и O — начала координат.

Таких случаев шесть. Сначала рассмотрим три случая, в которых B правее A (рис. 4, *а—в*).

В первом из них (рис. 4, *а*) расстояние $\rho(A, B)$ равно разности расстояний от точек B и A до начала координат. Так как в этом случае x_1 и x_2 положительны и $x_2>x_1$, получаем, что $\rho(A, B)=x_2-x_1$.

Во втором случае (рис. 4, *б*) расстояние равно сумме расстояний от точек A и B до начала координат, т. е. по-прежнему

$$\rho(A, B)=x_2-x_1,$$

поскольку в этом случае x_2 положительно, а x_1 отрицательно.

Покажите, что и в третьем случае (рис. 4, *в*) расстояние определяется той же формулой.

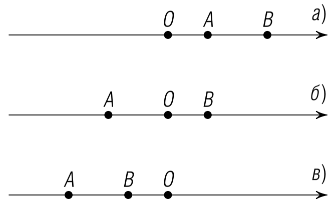

Рис. 4

*) Обычно для обозначения расстояния используется греческая буква ρ («ро»). Выражение $\rho(A, B)$ обозначает расстояние между точками A и B.

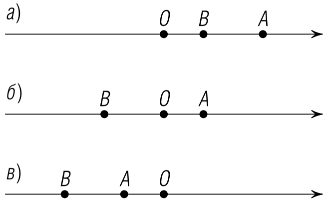

Рис. 5

Другие три случая (рис. 5, *а—в*) отличаются от разобранных тем, что точки A и B поменялись ролями. В каждом из этих случаев можно проверить, что расстояние между точками A и B равно $\rho(A, B) = x_1 - x_2$.

Итак, во всех случаях, когда $x_2 > x_1$, расстояние $\rho(A, B)$ равно $x_2 - x_1$, а во всех случаях, когда $x_1 > x_2$, это расстояние равно $x_1 - x_2$. Вспоминая определение модуля, можно записать это единой формулой, пригодной во всех случаях:

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

При желании эту формулу можно записать и в виде

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|.$$

Если быть педантичным, то нужно разобрать ещё случай, когда $x_1 = x_2$, т. е. когда точки A и B совпадают. Ясно, что и в этом случае

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

Таким образом, поставленная задача решена полностью.

Упражнения

15. Отметьте на числовой оси точки x, для которых
а) $\rho(x, 7) < 3$; б) $|x-2| > 1$; в) $|x+3| = 3$.

16. На числовой оси отмечены две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Найдите координату середины отрезка AB.

Примечание. При решении этой задачи вы должны рассмотреть все возможные случаи расположения точек A и B на числовой оси или придумать такое решение, которое годилось бы сразу для всех случаев.

17. Найдите координаты всех точек на числовой оси, которые расположены втрое ближе к точке $A(-9)$, чем к точке $B(-3)$.

18. Решите уравнения:
а) $|x+3|+|x-1|=5$; в) $|x+3|+|x-1|=4$; д) $|x+3|+|x-1|=3$;
б) $|x+3|-|x-1|=5$; г) $|x+3|-|x-1|=4$; е) $|x+3|-|x-1|=3$.

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 4. Координатная плоскость. Чтобы определить координаты точки на плоскости, проведём в этой плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси. Одну из осей называют *осью абсцисс* или *осью* x (или Ox), другую — *осью ординат* или *осью* y (или Oy).

Направление осей выбирают так, чтобы положительная полуось Ox совмещалась с положительной полуосью Oy поворотом на 90° против часовой стрелки (рис. 6). Точку пересечения осей называют *началом координат* и обозначают буквой O. Она является началом отсчёта для каждой из двух числовых осей Ox и Oy. Единицы масштаба на этих осях выбираются, как правило, одинаковыми.

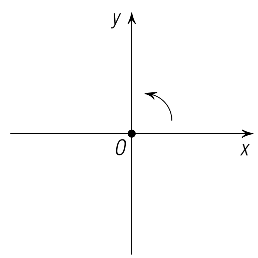

Рис. 6

Возьмём на плоскости некоторую точку M и опустим из неё перпендикуляры на ось Ox и ось Oy (рис. 7). Точки пересечения M_1 и M_2 этих перпендикуляров с осями называются *проекциями* точки M на оси координат.

Точка M_1 лежит на числовой оси Ox, поэтому ей соответствует определённое число x — её координата на этой оси. Точно так же точке M_2 соотвествует определённое число y — её координата на оси Oy.

Таким образом, каждой точке M, лежащей на плоскости, ставятся в соответствие два числа x и y, которые называются *прямоугольными декартовыми координатами* точки M. Число x называется *абсциссой* точки M, число y — её *ординатой*.

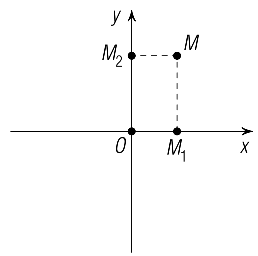

Рис. 7

Итак, прямоугольными декартовыми координатами точки на плоскости называются координаты проекций этой точки на оси координат.

Координаты точки M записываются обычно так: $M(x, y)$. На первом месте записывается абсцисса, на втором — ордината. Иногда для краткости вместо «точка с координатами 3, —8» говорят «точка (3, —8)».

Оси координат делят плоскость на четыре *четверти* (*квадранта*).

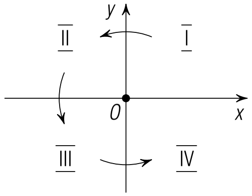

Рис. 8

Первой четвертью считается четверть между положительной полуосью Ox и положительной полуосью Oy. Далее четверти нумеруются по порядку против часовой стрелки (рис. 8).

Упражнения

Сначала мы предлагаем вам совсем простые задачи.

19. Какое слово здесь зашифровано: (6, 2), (9, 2), (12, 0), (11, —2), (9, —2), (4, —2), (2, —1), (1, 1), (—1, 1), (—2, 0), (—2, —2), (2, 1), (5, 2), (12, 2), (9, 1), (10, —2), (10, 0), (4, 1), (2, 2), (—2, 2), (—2, 1), (—2, —1), (0, 0), (2, 0), (2, —2), (4, —1), (12, —1), (12, —2), (11, 0), (7, 2), (4, 0), (9, 0), (4, 2), (12, 1)?

20. Не рисуя точку $A(1, -3)$, скажите, в какой четверти она расположена.

21. В каких четвертях может находиться точка, если её абсцисса положительна?

22. Какие знаки будут у координат точек, расположенных во второй четверти? В третьей четверти? В четвёртой?

23. На оси Ox взята точка с координатой —5. Каковы её координаты на плоскости?

Ответ. Абсцисса точки равна —5, ордината равна нулю.

Замечание. Пусть даны две точки плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда середина отрезка AB имеет координаты $((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$. Докажите этот факт самостоятельно.

А вот задачи немного посложнее:

24. Нарисуйте правильный шестиугольник $ABCDEF$: возьмите точку A за начало координат, ось абсцисс направьте от A к B, за единицу масштаба возьмите отрезок AB. Найдите координаты всех вершин этого шестиугольника. Сколько решений имеет эта задача?

25. На плоскости даны точки $A(0, 0)$, $B(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$. Какие координаты должна иметь точка C, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был параллелограммом?

§ 5. Соотношения, связывающие координаты. Если известны обе координаты точки, то её положение на плоскости определяется однозначно. Что можно сказать о положении точки, если известна только одна из её координат? Например, где лежат все точки, у которых абсцисса равна 3? Где расположены все точки, у которых одна координата (но неизвестно, какая) равна 3?

Соотношения между координатами чаще всего определяют не одну точку, а некоторое множество (совокупность) точек. Например, если отметить все точки, у которых абсцисса равна ординате, т. е. точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $x=y$, то получится прямая линия — биссектриса I и III четвертей (рис. 9).

Иногда вместо «множество всех точек» говорят «геометрическое место точек», имея в виду те и только те точки, которые обладают некоторым данным свойством. Например, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $x=y$, — это, как мы только что выяснили, биссектриса I и III четвертей.

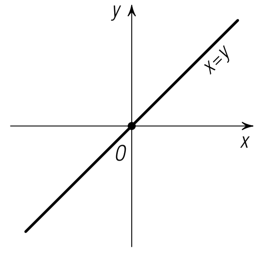

Рис. 9

Не следует думать, что всякое соотношение между координатами задаёт обязательно линию на плоскости. Например, вы легко можете убедиться, что соотношение $x^2+y^2=0$ определяет одну единственную точку — начало координат. Соотношению $x^2+y^2=-1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки на плоскости (оно определяет так называемое «пустое» множество).

Соотношение $x^2-y^2=0$ задаёт на плоскости пару взаимно перпендикулярных прямых (рис. 10). Соотношение $x^2-y^2>0$ задаёт целую область (рис. 11).

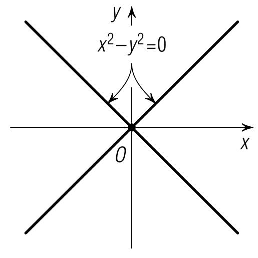

Рис. 10

Упражнения

26. Определите, какие множества точек определяются соотношениями:

а) $|x|=|y|$; г) $[x]=[y]$*);
б) $x/|x|=y/|y|$; д) $x-[x]=y-[y]$;
в) $|x|+x=|y|+y$; е) $x-[x]>y-[y]$.

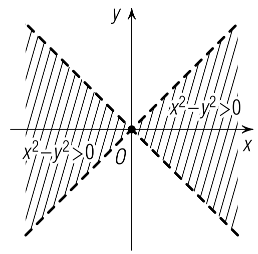

Рис. 11

27. Плоскость делится осями координат на четыре четверти. По I и III четвертям (включая координатные оси) можно передвигаться со скоростью a, по II и IV (исключая координатные оси) — со скоростью b. Нарисуйте множество точек (зависящее от t), в которые можно попасть из начала координат за время t, если при этом:

а) скорость a вдвое больше, чем b;
б) скорости связаны соотношением $a=b\sqrt{2}$.

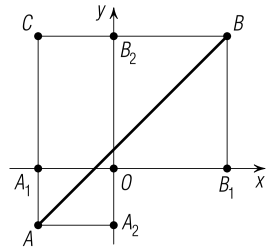

Рис. 12

§ 6. Расстояние между двумя точками.

28. Даны две точки плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Найти расстояние $\rho(A, B)$ между ними.

Решение. Обозначим через A_1, B_1, A_2, B_2 (рис. 12) проекции точек A и B на оси координат.

*) Символом $[x]$ обозначают целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[5]=5$, $[\pi]=3$, $[-2{,}5]=-3$.

Точку пересечения прямых AA_1 и BB_2 обозначим буквой C. Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора получаем

$$\rho^2(A, B) = \rho^2(A, C) + \rho^2(B, C). \qquad (1)$$

Но длина отрезка AC равна длине отрезка A_2B_2. Точки A_2 и B_2 лежат на оси Oy и имеют соответственно координаты y_1 и y_2. Согласно формуле, полученной в § 3, расстояние между ними равно $|y_1 - y_2|$.

Аналогично рассуждая, получим, что длина отрезка BC равна $|x_1 - x_2|$. Подставляя найденные значения AC и BC в формулу (1), получаем: $\rho^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Таким образом, $\rho(A, B)$ — расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Заметим, что все наши рассуждения годятся не только для такого расположения точек, как на рис. 12, но и для любого другого. Сделайте другой чертёж (например, возьмите точку B в III четверти, а точку A — во II; или, например, возьмите точки A и B с одинаковыми абсциссами) и убедитесь, что все рассуждения можно будет практически дословно повторить, не меняя даже обозначений точек.

Заметим ещё, что формулу из § 3 для расстояния между точками на прямой (см. стр. 6) можно записать в аналогичном виде*):

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

Упражнения

29. Нарисуйте точки $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$ и $D(0, 0)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — квадрат. Какова длина стороны этого квадрата? Какова его площадь**) ? Найдите координаты середин сторон квадрата $ABCD$. Придумайте ещё четыре точки (укажите их координаты) так, чтобы они служили вершинами квадрата со сторонами, не параллельными осям координат.

30. На плоскости даны три точки $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$, $C(1, -2)$. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

Указание. Покажите, что одна из сторон «треугольника» ABC равна сумме двух других его сторон.

31. Примените формулу расстояния между точками для доказательства следующей теоремы: в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей.

Указание. Возьмите одну из вершин параллелограмма за начало координат и воспользуйтесь результатами упражнения **25**. Вы увидите, что доказательство теоремы сведётся к проверке простого алгебраического тождества. Какого?

32. Докажите с помощью метода координат следующую теорему: если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M справедливо равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$. Как удобнее расположить оси координат?

§ 7. Задание фигур. В § 5 мы привели несколько примеров соотношения между координатами, которые определяют некоторые фигуры на плоскости. Ещё немного поучимся задавать геометрические фигуры при помощи соотношений между координатами.

Всякую фигуру мы рассматриваем как совокупность точек, из которых она состоит, и задать фигуру — значит задать способ, по которому можно было бы узнавать, принадлежит ли та или иная точка рассматриваемой фигуре, или нет.

Чтобы найти такой способ, например, для окружности, воспользуемся определением окружности как множества всех точек, расстояние до которых от некоторой точки (центра окружности) равно положительному числу R (радиусу). Значит, для того, чтобы точка $M(x, y)$ лежала на окружности с центром $C(a, b)$ (рис. 13), необходимо и достаточно, чтобы $\rho(M, C)$ было равно R.

Вспомним, что расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Следовательно, условие того, что точка $M(x, y)$ лежит на окружности с центром $C(a, b)$ и радиусом R, выражается соотношением $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$, которое можно переписать в виде

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Таким образом, для того, чтобы выяснить, лежит ли какая-нибудь точка на окруж-

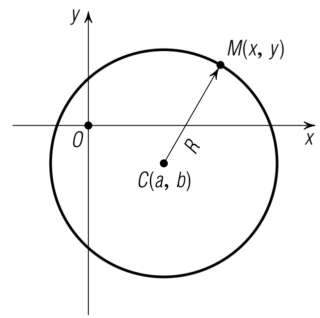

Рис. 13

*) Мы пользуемся тем, что $\sqrt{x^2} = |x|$ (имеется в виду арифметическое значение корня). Неаккуратное использование этого правила (иногда ошибочно считают, что $\sqrt{x^2} = x$) может привести к неправильным выводам. Для примера мы приводим цепь заключений, содержащую такого рода неточность, и предлагаем вам обнаружить ошибку:

$$1-3=4-6 \Rightarrow 1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4} \Rightarrow \left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow 1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2} \Rightarrow 1=2$$

(знак $\Rightarrow$ заменяет слово «следовательно»).

**) За единицу измерения площади мы выбираем площадь квадрата, сторона которого равна единице масштаба на осях.

ности, нужно проверить, удовлетворяется ли для её координат соотношение (2). Для этого нужно подставить в (2) вместо x и y координаты рассматриваемой точки. Если мы получим верное равенство, то точка лежит на окружности, а в противном случае — не лежит. Итак, зная уравнение (2), мы можем про любую точку плоскости сказать, лежит она на окружности, или нет. Поэтому уравнение (2) называют *уравнением окружности* с центром $C(a, b)$ и радиусом R.

Упражнения

33. Напишите уравнение окружности с центром $C(-2, 3)$ и радиусом 5. Проходит ли эта окружность через точку $(2, -1)$?

34. Покажите, что уравнение $x^2+2x+y^2=0$ задаёт на плоскости некоторую окружность. Найдите её центр и радиус.

Указание. Представьте данное уравнение в виде $(x^2+2x+1)+y^2=1$ или $(x+1)^2+y^2=1$.

35. Какое множество точек задаёт соотношение $x^2+y^2\leqslant 4x+4y$?

Решение. Перепишем это неравенство так:

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4\leqslant 8,$$

или

$$(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 8.$$

Как теперь ясно, это соотношение выражает то, что расстояние от точки искомого множества до точки $(2, 2)$ меньше или равно 8. Очевидно, что точки, удовлетворяющие этому условию, заполняют круг радиуса $\sqrt{8}$ с центром в $(2, 2)$ (рис. 14). Так как в соотношении допускается равенство, граница круга тоже принадлежит искомому множеству.

Мы убедились в том, что окружность на плоскости можно задать с помощью некоторого уравнения. Таким же образом можно задавать и другие линии, только уравнения, конечно, будут выглядеть иначе.

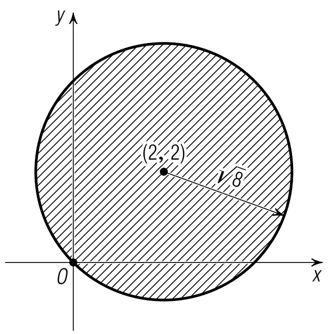

Рис. 14

Мы уже выяснили, что уравнение $x^2-y^2=0$ задаёт пару прямых (см. стр. 9). Остановимся на этом поподробнее. Если $x^2-y^2=0$, то $x^2=y^2$ и, следовательно, $|x|=|y|$. Обратно, если $|x|=|y|$, то $x^2-y^2=0$, поэтому эти соотношения равносильны. Но абсолютная величина абсциссы точки — это расстояние до оси Oy, а абсолютная величина ординаты — расстояние от точки до оси Ox. Значит, точки, для которых $|x|=|y|$, одинаково удалены от осей координат, т. е. лежат на двух биссектрисах углов, образованных этими осями. Ясно, что и обратно, координаты любой точки на каждой из этих двух биссектрис удовлетворяют соотношению $x^2=y^2$. Поэтому уравнение $x^2-y^2=0$ мы называем уравнением совокупности этих двух биссектрис.

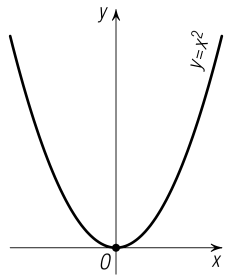

Рис. 15

Вы, конечно, знаете и другие примеры задания линий с помощью уравнений. Например, уравнению $y=x^2$ удовлетворяют все точки параболы с вершиной в начале координат, и только точки этой параболы (рис. 15). Уравнение $y=x^2$ называется уравнением этой параболы.

Вообще, уравнением некоторой линии называется уравнение, которое обращается в верное равенство всякий раз, когда вместо x и y подставляют координаты любой точки этой линии, и не удовлетворяется, если подставить координаты точки, не лежащей на этой линии.

§ 8. Алгебра и геометрия. Переводя геометрические понятия на язык координат, мы получаем возможность вместо геометрических задач рассматривать алгебраические. Оказывается, что после такого перевода большинство задач, связанных с прямыми и окружностями, приводят к уравнениям первой и второй степени, а для решения таких уравнений есть простые общие формулы.

Проиллюстрируем примером сведение геометрических задач к алгебраическим.

36. Дан треугольник ABC. Найдите центр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Примем точку A за начало координат, ось абсцисс направим от A к B. Тогда точка B будет иметь координаты $(c, 0)$, где c — длина отрезка AB. Пусть точка C имеет координаты (g, h), а центр искомой окружности — координаты (v, w). Радиус описанной окружности обозначим через R (рис. 16). Запишем в координатах, что точки $A(0, 0)$, $B(c, 0)$, $C(g, h)$ лежат на этой окружности:

$$\begin{cases} v^2+w^2=R^2, \\ (c-v)^2+w^2=R^2, \\ (g-v)^2+(h-w)^2=R^2. \end{cases}$$

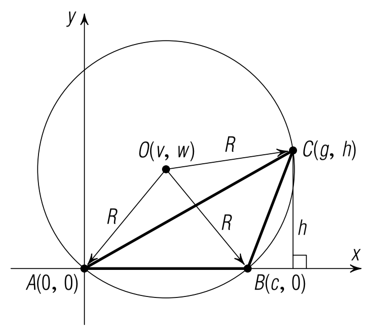

Рис. 16

Совокупность этих условий выражает тот факт, что расстояние от точек $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ и $C(g, h)$ до центра окружности $O(v, w)$ равно R. Их легко получить также, если записать уравнение окружности с центром в (v, w) и радиусом R:

$$(x-v)^2+(y-w)^2=R^2,$$

а затем в это уравнение вместо x и y подставить координаты точек A, B, C, лежащих на этой окружности.

Эта система трёх уравнений с тремя неизвестными легко решается, и мы получаем:

$$v=\frac{c}{2},\quad w=\frac{g^2+h^2-cg}{2h},\quad R=\frac{\sqrt{(g^2+h^2)((g-c)^2+h^2)}}{2h}.$$

Задача решена, так как мы нашли координаты центра.

Отметим, что заодно мы получили формулу для вычисления радиуса окружности, описанной около треугольника. Эту формулу можно упростить, заметив, что $\sqrt{g^2+h^2}=\rho(A, C)$, $\sqrt{(g-c)^2+h^2}=\rho(B, C)$, а число h равно высоте треугольника ABC, опущенной из вершины C (см. рис. 16). Если обозначить длины сторон BC и AC треугольника ABC, соответственно, через a и b, то формула для радиуса примет красивый и удобный вид:

$$R=\frac{ab}{2h}.$$

Можно ещё заметить, что $hc=2S$, где S — площадь треугольника ABC, и переписать нашу формулу в виде

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

А сейчас мы хотим показать вам задачу, которая интересна тем, что геометрическое решение её довольно сложно; если же перевести её на язык координат, то решение становится совсем простым.

37. На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M, удалённых от A вдвое больше, чем от B.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы точка A совпадала с началом координат, а точка B имела координаты $(1, 0)$. Координаты точки M обозначим через (x, y). Условие $\rho(A, M)=$ $=2\rho(B, M)$ записывается в координатах так:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Мы получили уравнение искомого геометрического места точек. Чтобы понять, какое множество описывается этим уравнением, преобразуем уравнение так, чтобы оно приняло знакомый вам вид. Возведя обе части в квадрат (подумайте, почему в данном случае это будет равносильным переходом), раскрыв скобки и приведя подобные члены, получаем равенство

$$3x^2-8x+4+3y^2=0.$$

Это равенство можно переписать так:

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2=\frac{4}{9},$$

или так:

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

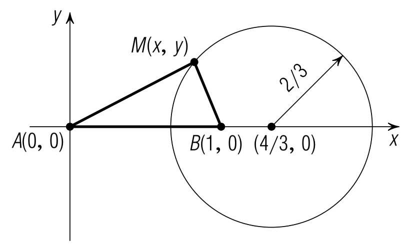

Рис. 17

Вы уже знаете, что это уравнение является уравнением окружности радиуса $\frac{2}{3}$ с центром в точке $\left(\frac{4}{3},0\right)$. Это значит, что геометрическим местом точек является окружность (рис. 17).

Для нашего решения несущественно, что $\rho(A, M)$ именно в два раза больше $\rho(B, M)$, поэтому на самом деле решена более общая задача. А именно, доказано, что геометрическое место точек M, отношение расстояний

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)}=k$$

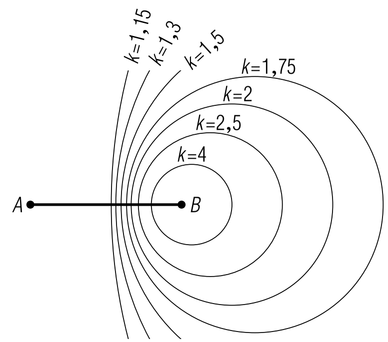

Рис. 18

от которых до данных точек A и B постоянно (k — заданное положительное число, не равное 1), является окружностью (рис. 18). Эта окружность называется *окружностью Аполлония*. Как расположены окружности, отвечающие значениям k, обратным к приведённым на рис. 18?

Чтобы убедиться в силе метода координат, попробуйте решить эту же задачу геометрически.

У к а з а н и е. Проведите из точки M биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника AMB. Пусть K и L — точки пересечения этих биссектрис с прямой AB. Докажите, что $\widehat{KML}=90^\circ$, а положение точек K и L не зависит от выбора точки M на искомом геометрическом месте точек.

Предыдущие примеры показывают, как метод координат позволяет приенять алгебру к решению геометрических задач. С помощью этого метода иногда можно облегчить решение и алгебраических задач, истолковав их геометрически. Приведём пример такой задачи.

38. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a \end{cases}$$

не имеет решений? имеет одно решение? имеет бесконечное множество решений?

У к а з а н и е. Первое уравнение системы — это уравнение окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Второе уравнение — это уравнение прямой, проходящей через точки $(a, 0)$ и $(0, a)$. Решить систему — значит найти точки, координаты

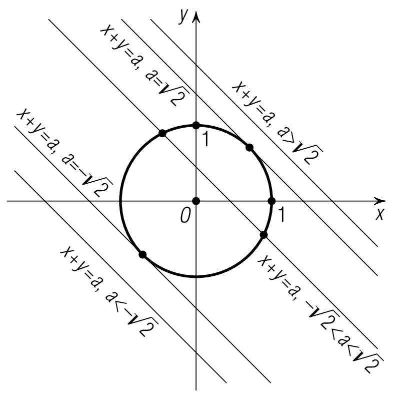

Рис. 19

которых удовлетворяют обоим уравнениям, т. е. найти точки пересечения прямой $x+y=a$ и окружности $x^2+y^2=1$. Из рис. 19 ясно*), что при $a>\sqrt{2}$ и при $a<-\sqrt{2}$ прямая не пересекает окружность, при $a=\pm\sqrt{2}$ прямая касается окружности, при $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ прямая пересекает окружность в двух точках.

§ 9. Векторы на плоскости. Любые две точки A и B плоскости, данные в определённом порядке (например, A является первой точкой, а B — второй), определяют отрезок вместе с заданным на нём направлением (а именно, направлением от A к B), или *направленный отрезок* с началом A и концом B. Направленный отрезок называют короче *вектором*. Вектор с началом A и концом B обозначают через $\overrightarrow{AB}$, точка A иногда называется *точкой приложения* вектора $\overrightarrow{AB}$. *Длиной вектора* $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ **) называется длина отрезка AB и обозначается через $|\boldsymbol{a}|$. Векторы называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается через $\mathbf{0}=\overrightarrow{AA}$ (точка A при этом любая). Направление нулевого вектора не определено.

Координатами вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$ с началом в точке A_1 с координатами (x_1, y_1) и концом в точке A_2 с координатами (x_2, y_2) называется пара чисел (x_2-x_1, y_2-y_1). Равные векторы имеют равные соответственные координаты, и обратно, векторы с одинаковыми координатами равны. Нулевой вектор $\mathbf{0}$ имеет координаты $(0, 0)$.

Для векторов определены операции сложения и умножения на число. Для того, чтобы найти сумму $\boldsymbol{c}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$), нужно взять произвольную точку A; считая её началом вектора $\boldsymbol{a}$, найти конечную точку B вектора $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$); далее, приняв B за начальную точку вектора $\boldsymbol{b}$, найти его конечную точку C. Вектор $\overrightarrow{AC}$ (с началом в точке A и концом в точке C) является искомым вектором $\boldsymbol{c}$ — суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 20). Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

*) Конечно же, строгое решение задачи не должно ссылаться на конкретный рисунок: он может помочь в решении, но не должен заменять собой доказательства. Поэтому приведённое рассуждение — это лишь указание, а не строгое решение.

**) Вектор можно обозначать как привычным способом — отрезок со стрелкой, — так и более коротко, жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, $\mathbf{0}$. (Поскольку на письме довольно сложно изобразить жирный шрифт, на письме векторы всегда помечают стрелкой: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{0}$.)

Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$, то координатами вектора $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ является пара чисел (a_1+b_1, a_2+b_2), т. е. при сложении векторов их соответствующие координаты также складываются.

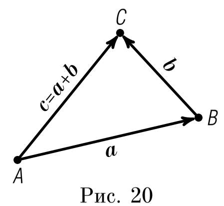

Рис. 20

Для того, чтобы вектор $\boldsymbol{a}$ умножить на число λ, нужно взять произвольную точку A, найти точку B, считая $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, провести прямую через точки A и B и отложить от точки A на этой прямой отрезок, длина которого равна произведению числа $|\lambda|$ на длину отрезка AB, причём направление выбирается то же, что и у $\overrightarrow{AB}$, если $\lambda>0$, а при $\lambda<0$ направление берётся противоположное. Тогда другой конец C этого отрезка определяет вектор $\overrightarrow{AC}$, который и называется *произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* λ: $\overrightarrow{AC}=\lambda\boldsymbol{a}$.

Отметим, что при умножении нулевого вектора $\mathbf{0}$ на произвольное число λ получается нулевой вектор: $\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Тот же результат получается при умножении произвольного вектора на нуль: $0\cdot\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ координаты вектора (a_1, a_2) умножаются на число λ: $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Упражнения

39. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{b}=\lambda\overrightarrow{AB}$, если $\lambda=-2$, $A(1, -4)$, $B(-2, 3)$.

40. Найдите координаты точки B, если известно, что $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}=(2, -1)$, $\boldsymbol{b}=(-1, 3)$, $A(-3, -1)$.

Несколько векторов называются *коллинеарными* между собой, если они, будучи приложенными к одной точке, оказываются лежащими на одной прямой. Отметим, что нулевой вектор коллинеарен всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Если известны координаты вектора $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$, то его длина находится по формуле

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Углом между двумя ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (обозначается $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$) называется угол $\widehat{AOB}$, где $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ (рис. 21). Отметим, что $0^\circ\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})\leqslant180^\circ$ для любых двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

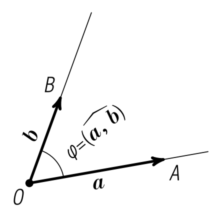

Рис. 21

Для любых двух векторов вводится операция скалярного произведения. *Скалярным произведением* двух векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \cos\varphi$, где φ — величина угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор равно нулю. Скалярное произведение двух перпендикулярных векторов также равно нулю. Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$, то скалярное произведение находится по формуле

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Отметим, что, зная скалярное произведение и длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, легко найти величину угла между ними по формуле

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

В случае, когда известны координаты векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$, получаем $\varphi = \arccos \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Упражнения

41. Найдите величину угла ABC, если $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-1, 2)$.

42. Докажите равенства

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$; 2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$; 3) $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Указание к задачам **43—47**. Воспользуйтесь свойствами скалярного произведения из задачи **42**.

43. Вычислите $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, если $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 135°.

44. Вычислите длину вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, если известно, что $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $|\boldsymbol{c}| = 5$, а углы между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и между $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равны 60°.

45. Покажите, что угол между диагоналями прямоугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b})$, определяется формулой

$$\cos\varphi = \pm\frac{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} \quad (\boldsymbol{a}^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2).$$

46. Найдите угол между векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ — векторы единичной длины, а $(\widehat{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}}) = \varphi$.

47. В равнобедренной трапеции $OABC$ $(OA = BC)$ точки M, N — середины сторон BC и AB соответственно. Острый угол при вершине O трапеции равен 60°, $AB = BC = 2$. Определите угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$.

§ 10. Прямая на плоскости. Всякая прямая на плоскости определяется ненулевым вектором $\boldsymbol{u}$, который коллинеарен всем векторам, лежащим на прямой, и некоторой точкой M_0, лежащей на этой прямой (рис. 22). Вектор $\boldsymbol{u}$ называется *направляющим вектором*.

Множество точек M, принадлежащих прямой l с направляющим вектором $\boldsymbol{u}$ и лежащей на ней точкой M_0, задаётся соотношением $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{u}$, где t пробегает все действительные числа.

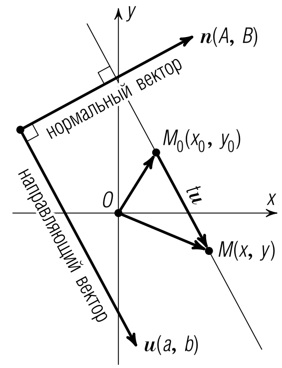

Рис. 22

Если на плоскости отмечена точка O (начало координат), то можно написать эквивалентное уравнение (называемое *векторным уравнением прямой*)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\boldsymbol{u}$$

(см. рис. 22), которым часто пользуются (например, в механике).

Если известны координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ и вектора $\boldsymbol{u}(a, b)$, то векторное уравнение в координатной форме примет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \end{cases}$$

где (x, y) — координаты точки M.

Эта система уравнений называется системой параметрических уравнений данной прямой или, короче, её *параметрическим уравнением*.

Параметрической системе уравнений данной прямой эквивалентно уравнение

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0,$$

или $Ax + By + C = 0$, где $A = b$, $B = -a$, $C = ay_0 - bx_0$. Последнее уравнение называется *общим уравнением* прямой на плоскости. Несложно проверить (сделайте это), что коэффициенты A и B определяют координаты вектора $\boldsymbol{n}(A, B)$, который перпендикулярен всем векторам, лежащим на данной прямой. Ненулевые векторы, которые перпендикулярны всем векторам, лежащим на прямой, называются *нормальными векторами* данной прямой.

Если известен нормальный вектор $\boldsymbol{n}(A, B)$ и точка M_0, лежащая на прямой, то общее уравнение прямой эквивалентно уравнению

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0,$$

где M — произвольная точка прямой (см. рис. 22).

Отметим ряд частных случаев расположения прямых на плоскости, связанных с особыми значениями коэффициентов общего уравнения. Если $A = 0$, то прямая параллельна оси Ox. Если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy. Равенство $C = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы точка $O(0, 0)$ лежала на данной прямой.

Если прямая не проходит через начало координат и не параллельна ни одной из координатных осей, то ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю, поэтому общее уравнение прямой может быть записано в виде $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$, т. е. в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$ (естественно, это уже совсем другие a и b, чем

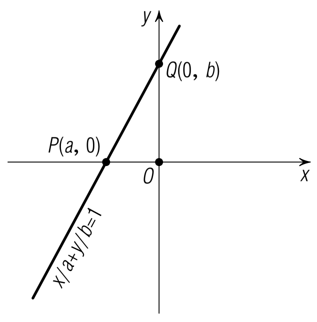

Рис. 23

в параметрическом уравнении прямой). Полагая в этом уравнении $y=0$, получаем точку $P(a, 0)$ пересечения нашей прямой с осью Ox. Аналогично при $x=0$ получаем точку $Q(0, b)$ пересечения прямой с осью Oy (рис. 23). Полученное уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*.

Пусть теперь в общем уравнении прямой $Ax+By+C=0$ коэффициент B не равен нулю, т. е. прямая не параллельна оси Oy. Тогда её уравнение можно представить в следующем виде:

$$y=kx+m,$$

где $k=-A/B$, $m=-C/B$. Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Число m задаёт координату точки пересечения прямой с осью Oy, k — тангенс угла наклона прямой, отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки (рис. 24).

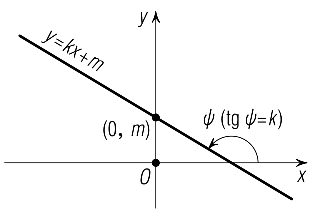

Рис. 24

Упражнения

48. Напишите общее уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок длины 3 и имеющей угол наклона а) 45°; б) 135°.

49. Определите параметры k и m для каждой из прямых

а) $2x-3y=6$; б) $2x+3y=0$; в) $y=-3$; г) $x/4+y/3=1$.

50. Напишите уравнение прямой с углом наклона 45°, проходящей через точку $A(2, 3)$.

51. Приведите уравнения прямых к виду в отрезках на осях: а) $2x-3y=6$; б) $3x-2y+4=0$.

52. Даны точки $O(0, 0)$ и $A(-3, 0)$. Отрезок OA является стороной параллелограмма, диагонали которого пересекаются в точке $B(0, 2)$. Напишите уравнения сторон и диагоналей этого параллелограмма.

53. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(4, 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площади 3.

§ 11. Расположение двух прямых на плоскости. Пусть даны два уравнения $Ax+By=C=0$ и $A'x+B'y+C'=0$, определяющие, соответственно, две прямые d и d'. Прямые d и d' пересекаются, только если векторы, нормальные к ним: $\boldsymbol{n}(A, B)$ и $\boldsymbol{n}'(A', B')$, не будут коллинеарны, т. е. если $AB'-A'B\neq 0$ (подумайте, как получается это соотношение). Если векторы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ коллинеарны, то прямые не пересекаются (т. е. параллельны) или совпадают. Аналогичные утверждения верны и для направляющих векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ прямых d и d'. Прямые d и d' пересекаются только в одной точке тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ неколлинеарны. Для нахождения угла φ между прямыми d и d' достаточно найти угол между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}'$ (рис. 25), который равен $\arccos\dfrac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{u}'|}$. Поскольку $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{n}'\perp\boldsymbol{u}'$, верно равенство

$$\varphi=\arccos\frac{|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}')|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{n}'|}.$$

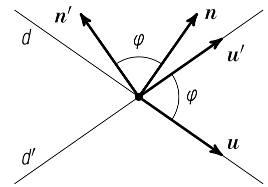

Рис. 25

В случае, когда прямые d и d' представлены уравнениями $y=kx+c$ и $y=k'x+c'$, угол между ними находится из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi=|\operatorname{tg}(\psi-\psi')|=\left|\frac{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\psi'}{1+\operatorname{tg}\psi\cdot\operatorname{tg}\psi'}\right|=\left|\frac{k-k'}{1+kk'}\right|, \quad (3)$$

откуда $\varphi=\operatorname{arctg}\left|\dfrac{k-k'}{1+kk'}\right|$ при $kk'\neq-1$ (рис. 26) и $\varphi=\pi/2$ при $kk'=-1$.

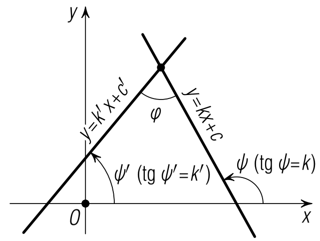

Рис. 26

Заметим, что изображенные на рис. 26 углы ψ и ψ' не обязательно равны $\operatorname{arctg} k$ и $\operatorname{arctg} k'$, поскольку $\operatorname{arctg}\alpha$ находится в пределах от -90° до 90°: так, например, для случая на рис. 26 $\psi=180^\circ+\operatorname{arctg} k$. Однако приведённые выкладки, с учётом того, что $\operatorname{tg}(\alpha-180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha$, всё равно остаются справедливыми. Заметим также, что формула (3) является справедливой и для случая, когда хотя бы одна из прямых параллельна оси абсцисс.

Упражнения

54. Определите угол между прямыми

а) $y=2x-3$ и $y=x/2+1$; г) $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$;
б) $2x+y=0$ и $y=3x-4$; д) $3x+2y=0$ и $6x+4y+9=0$;
в) $3x-4y=6$ и $8x+6y=11$; е) $x/a+y/b=1$ и $x/b+y/a=1$.

55. Среди прямых $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ укажите параллельные и перпендикулярные.

56. В точках пересечения прямой $2x-5y-10=0$ с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Напишите их уравнения.

57. Из точки $A(5, 4)$ выходит луч света под углом $\varphi=\operatorname{arctg} 2$ к положительному направлению оси Ox и от неё отражается. Напишите уравнение падающего и отражённого лучей.

58. Определите вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$.

59. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$.

60. Найдите площадь треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$.

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 12. Координатные оси и плоскости. Для определения положения точки в пространстве нужно взять три числовые оси: ось Ox — *ось абсцисс*, ось Oy — *ось ординат*, ось Oz — *ось аппликат*. Эти оси проводят через одну точку — начало координат O — так, чтобы каждые две из них были взаимно перпендикулярны. Направление осей обычно выбирают так, чтобы положительная полуось x совмещалась с положительной полуосью y вращением на 90° против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси z (рис. 27). Такая система координат называется *декартовой прямоугольной правой*. А если поменять местами оси Ox и Oy, то получится *декартова прямоугольная левая* система координат. Однако при решении задач обычно используют именно правую систему.

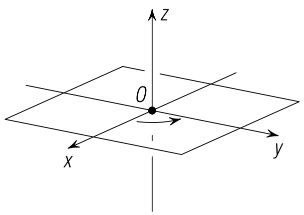

Рис. 27

В пространстве, кроме координатных осей, удобно рассматривать ещё и координатные плоскости, т. е. плоскости, проходящие через две какие-либо координатные оси. Их три (рис. 28): плоскость xy (проходящая через оси x и y) — множество точек вида $(x, y, 0)$, где x и y — любые числа; плоскость xz (проходящая через оси x и z) — множество точек вида $(x, 0, z)$, где x и z — любые числа; плоскость yz (проходящая через оси y и z) — множество точек вида $(0, y, z)$, где y и z — любые числа.

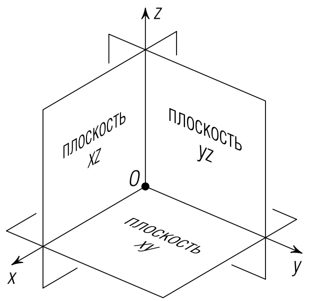

Рис. 28

Теперь для каждой точки пространства можно найти три числа x, y, z — её координаты. Чтобы найти первое число x, проведём через точку M плоскость, параллельную координатной плоскости yz (проведённая плоскость будет одновременно перпендикулярна к оси Ox). Точка пересечения этой плоскости с осью Ox (точка M_1 на рис. 29, *а*) имеет на этой оси координату x. Это число x — координата точки M_1 на оси Ox — называется *абсциссой* точки M.

Чтобы найти вторую координату, через точку M проводят плоскость, параллельную плоскости xz (перпендикулярную к оси Oy), и находят на оси Oy точку M_2 (рис. 29, *б*). Число y — координата точки M_2 на оси Oy — называется *ординатой* точки M.

Аналогично, проведя через точку M плоскость, параллельную плоскости xy (перпендикулярную к оси Oz), находят число z — координату точки M_3 (рис. 29, *в*) на оси Oz. Это число z называется *аппликатой* точки M.

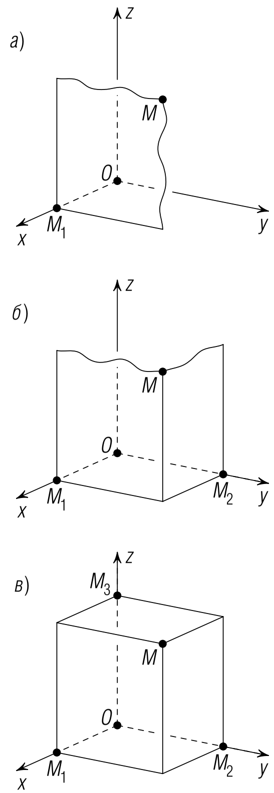

Рис. 29

Таким образом каждой точке пространства мы поставили в соответствие определённую упорядоченную тройку чисел — её координаты: абсциссу, ординату и аппликату.

Обратно, каждой тройке чисел (x, y, z), заданных в определённом порядке (сначала x, затем y, потом z), можно поставить в соответствие определённую точку пространства M. Для этого воспользуемся описанным построением, проделав его с конца: отметим на осях точки M_1, M_2 и M_3, имеющие на этих осях, соответственно, координаты x, y и z, затем проведём через эти точки плоскости, параллельные координатным плоскостям; точка пересечения этих трёх плоскостей и будет искомой точкой. Очевидно, что числа x, y, z будут служить её координатами.

В курсе стереометрии доказывается, что точки M_1, M_2, M_3, построенные, как точки пересечения осей координат с плоскостями, проведёнными через точку M параллельно координатным плоскостям, являются проекциями M на оси координат, т. е. служат основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на оси координат. Так что для координат в пространстве можно дать определение, аналогичное определению координат точки на плоскости, а именно: координатами точки M в пространстве называются координаты проекций этой точки на координатные оси.

Многие формулы, выведенные для плоскости, нужно только немного видоизменить для случая пространства. Так, например, расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$\rho(A, B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

(Вывод этой формулы очень похож на вывод аналогичной формулы для плоскости. Попробуйте это сделать самостоятельно.) В частности, расстояние от точки $A(x, y, z)$ до начала координат выражается формулой $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

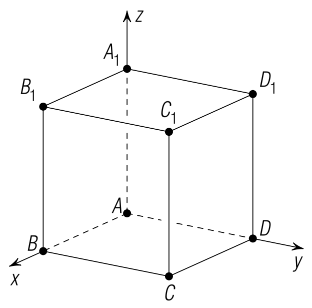

Рис. 30

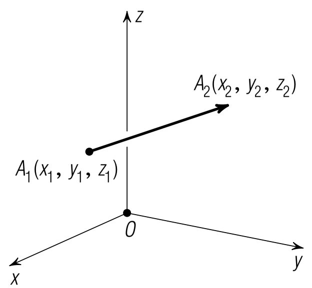

Рис. 31

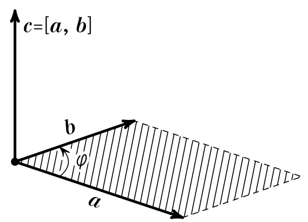

Рис. 32

Упражнения

61. Возьмём семь точек: $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$. Какая из этих точек наиболее удалена от точки $(1, 1, 1)$? Найдите расстояние от неё до точки $(1, 1, 1)$. Какие точки лежат ближе всего к точке $(1, 1, 1)$? Каково расстояние от них до точки $(1, 1, 1)$?

62. Направим оси координат по трём рёбрам куба (рис. 30), выходящим из одной вершины. За единицу масштаба выберем длину ребра куба. Найдите координаты а) всех вершин куба; б) середины ребра CC_1; в) точек пересечения диагоналей граней.

63. Чему равно расстояние от вершины $(0, 0, 0)$ куба задачи **62** до точки пересечения диагоналей грани BB_1C_1C?

64. Какие из перечисленных точек $A(1, 0, 5)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1/3, 3/4, 2/5)$, $D(7/5, 1/2, 3/2)$, $E(2/5, 1/2, 1/5)$, $F(1, 1/2, 1/3)$ лежат внутри куба задачи **62**, а какие вне его?

65. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри куба задачи **62** или на его границе.

§ 13. Векторы в пространстве. В пространстве, как и на плоскости, вектором называется направленный отрезок. Координатами вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ с началом в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 31) являются числа $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Равные векторы имеют соответственно равные координаты, и обратно, векторы с равными координатами равны. Поэтому векторы можно задавать их координатами: $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ или просто (a_1, a_2, a_3).

Над векторами определены действия сложения и умножения на число, а также взятие скалярного произведения.

Суммой векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $\boldsymbol{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$, при этом пишут $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Произведением вектора $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и числа λ называется вектор $\lambda\boldsymbol{a}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, обозначаемое через $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место равенство $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\times \times\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (определяемый так же,

как и в двумерном случае), а $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Напомним, что длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ с началом в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2, y_2, z_2)$ совпадает с длиной отрезка A_1A_2, т. е. равна $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

Кроме известных вам из школьной программы операций над векторами, определим ещё одну: операцию векторного произведения. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, который 1) имеет длину, равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; 2) перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; 3) направлен в такую сторону, с которой поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ на меньший из двух возможных углов виден против часовой стрелки (рис. 32).

Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, т. е. $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Есть и еще одно обозначение: $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Если известны координаты векторов $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$, то координаты (c_1, c_2, c_3) вектора $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ находятся по формулам

$$c_1=a_2b_3-a_3b_2, \quad c_2=a_3b_1-a_1b_3, \quad c_3=a_1b_2-a_2b_1.$$

Упражнения

66. Определите углы треугольника ABC с вершинами $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$ и $C(0, 0, 5)$.

67. Дан треугольник с вершинами $O(0, 0, 1)$, $A(2, 0, 1)$ и $B(1, -1, 1)$. Найдите угол, образованный стороной OB и медианой OM этого треугольника.

68. Найдите угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

69. На плоскости отмечены три последовательные вершины параллелограма: $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$. Найдите четвёртую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

70. Докажите равенства:

а) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$; б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$; в) $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

71. Докажите равенства:

а) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$; б) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$; в) $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

72. Докажите, что $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=\boldsymbol{0}$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, т. е. или $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, или $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, или $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, где λ — некоторое число.

73. Вычислите площадь треугольника с вершинами $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$ и $C(4, 5, -2)$.

74. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ составляют угол 45°. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ как на сторонах, если $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$.

75. Докажите, что объём V параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, равен $V=|([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c})|$.

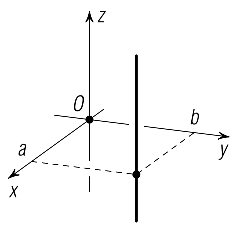

Рис. 33

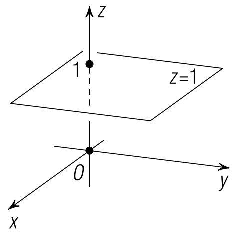

Рис. 34

§ 14. Задание фигур в пространстве. Так же, как и на плоскости, координаты в пространстве дают нам возможность задавать с помощью числовых соотношений не только точки, но и линии, поверхности и другие множества точек. Посмотрим, например, какое множество точек получится, если задать только две координаты, а третью считать произвольной. Условия $x=a$, $y=b$, где a и b — заданные числа (например, $a=5$, $b=4$), задают в пространстве прямую, параллельную оси z (рис. 33). Все точки такой прямой имеют одну и ту же абсциссу и ординату. Координата z может принимать любые значения. Точно так же условия $y=b$, $z=c$ определяют прямую, параллельную оси x, условия $x=a$, $z=c$ определяют прямую, параллельную оси y.

Интересно, какое множество точек получится, если задать только одну координату, например, $z=1$? Это плоскость, параллельная координатной плоскости, проходящей через ось x и ось y (т.е. плоскости xy) и находящаяся от неё на расстоянии 1 в направлении положительной полуоси z (рис. 34).

Разберём ещё несколько примеров, показывающих, как можно задавать в пространстве различные множества с помощью уравнений и других соотношений между координатами.

76. Какое множество описывает уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2? \qquad (4)$$

Р е ш е н и е. Поскольку расстояние от точки (a, b, c) до точки (x, y, z) задаётся выражением $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, то ясно, что в переводе на геометрический язык соотношение (4) означает, что точки с коодинатами (x, y, z), удовлетворяющие этому соотношению, находятся на расстоянии R от точки (a, b, c). Значит, множество всех точек, для которых выполнено соотношение (4), представляет собой сферу радиуса R с центром в точке (a, b, c).

Сфера радиуса R с центром в начале координат задаётся уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$.

77. Где расположены точки, координаты которых удовлетворяют соотношению $x^2+y^2+z^2<1$?

Р е ш е н и е. Поскольку это соотношение означает, что расстояние от точки (x, y, z) до начала координат меньше единицы, то искомым является множество точек, лежащих в н у т р и шара радиуса 1 с центром в начале координат.

78. Какое множество точек задаётся уравнением

$$x^2+y^2=1? \qquad (5)$$

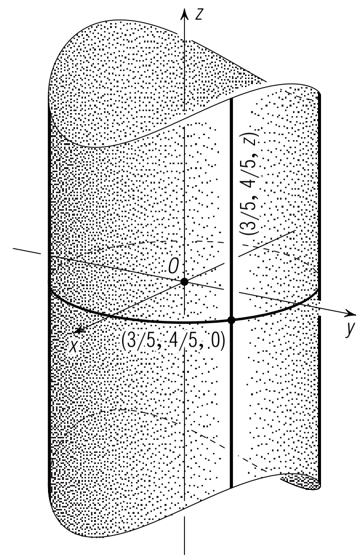

Рис. 35

Рассмотрим сначала только точки плоскости xy, удовлетворяющих этому соотношению, т. е. точки, для которых $z=0$. Тогда это уравнение, как мы видели раньше, задаёт окружность радиуса 1 с центром в начале координат. У каждой из этих точек координата z равна нулю, а координаты x и y удовлетворяют соотношению (5). Например, точка $(3/5, 4/5, 0)$ удовлетворяет этому уравнению (рис. 35). Однако, зная эту одну точку, мы можем найти сразу много других точек, удовлетворяющих тому же уравнению: так как в уравнение (5) координата z не входит, то и точка $(3/5, 4/5, 10)$ удовлетворяет уравнению (5), и точка $(3/5, 4/5, -5)$, и вообще все точки $(3/5, 4/5, z)$, где значение координаты z совершенно произвольно. Все эти точки лежат на прямой, проходящей через точку $(3/5, 4/5, 0)$ параллельно оси z.

Таким же образом из каждой точки $(x^*, y^*, 0)$ построенной окружности, лежащей в плоскости xy, мы можем получить много точек, удовлетворяющих уравнению (5). Для этого проведём через каждую точку окружности прямую, параллельную оси z. У всех точек этой прямой такие же x и y, как и у точки окружности, а z может быть любым числом, т. е. все эти точки имеют вид (x^*, y^*, z). Но поскольку z в уравнение (5) не входит, то точка (x^*, y^*, z) тоже удовлетворяет уравнению (5). Ясно, что таким образом получаются все точки, удовлетворяющие уравнению (5).

Итак, множество точек, определяемое уравнением (5), получается следующим образом: берём в плоскости xy окружность радиуса 1 с центром в начале координат и через каждую точку этой окружности проводим прямую, параллельную оси z. Мы получаем так называемую *цилиндрическую поверхность* (рис. 35).

79. Какое множество точек описывает уравнение $x^2+y^2=0$?

Мы видели, что одно уравнение задаёт в пространстве, вообще говоря, некоторую поверхность. Но это не всегда так. Например, уравнению задачи **79** удовлетворяют только точки оси z, так как из уравнения следует, что $x=y=0$, а все точки, для которых эти координаты равны нулю, лежат на оси z. Уравнение $x^2+y^2+z^2=0$, например, задаёт одну точку (начало координат), а уравнению $x^2+y^2+z^2=-1$ соответствует пустое множество.

Что будет, если рассмотреть точки, координаты которых удовлетворяют не одному уравнению, а системе уравнений?

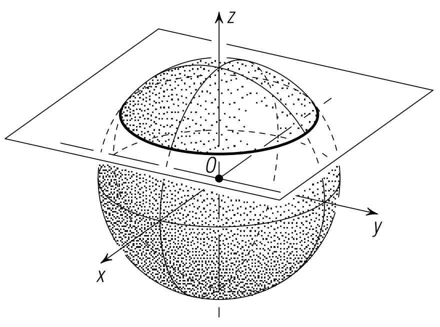

Рис. 36

80. Какая фигура задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=1? \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Точки, удовлетворяющие первому уравнению, заполняют поверхность сферы радиуса 2 с центром в начале координат. Точки, удовлетворяющие второму уравнению, заполняют плоскость, параллельную плоскости xy и расположенную от неё на расстоянии 1 в направлении положительной полуоси z. Точки, удовлетворяющие обоим уравнениям, должны лежать и на сфере $x^2+y^2+z^2=4$, и на плоскости $z=1$, т. е. на линии их пересечения. Таким образом, эта система задаёт окружность, являющуюся линией пересечения сферы и плоскости (рис. 36).

Мы видим, что каждое из уравнений системы задаёт поверхность, а оба уравнения вместе — линию.

81. Какие из указанных точек лежат на первой поверхности из задачи **80**, какие — на второй, а какие — на линии их пересечения: $(0, 2, 0)$, $(0, \sqrt{3}, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, \sqrt{3}, 0)$, $(0, 3, 1)$, $(-1, -2, 1)$?

82. Как задать в пространстве окружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в плоскости xy?

Р е ш е н и е. Уравнение $x^2+y^2=1$, как мы уже видели, определяет в пространстве цилиндрическую поверхность. Чтобы получить только точки нужной окружности, к этому уравнению надо добавить условие $z=0$, выделив тем самым из всех точек цилиндра точки, лежащие в плоскости xy (рис. 37). Получаем систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

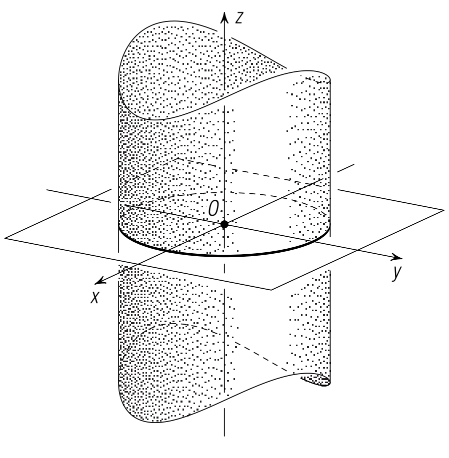

Рис. 37

Упражнения

83. Какие множества точек задают в пространстве соотношения

а) $x^2=1$; б) $y^2+z^2=1$;

в) $x^2+y^2+z^2=1$?

84. Рассмотрим три системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y^2+z^2=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x=0. \end{cases}$

Какие из них определяют одну и ту же линию, а какие — разные?

85. Какими уравнениями можно задать в пространстве прямую, содержащую биссектрису плоского угла xOy? Какое множество будет задавать в пространстве одно из этих уравнений?

86. Найдите координаты центра и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды с вершинами в точках $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$ (сфера называется описанной вокруг пирамиды, если все вершины пирамиды лежат на сфере).

87. Задайте алгебраическим соотношением (для координат) множество всех точек, каждая из которых вдвое ближе к точке $(-1, 1, 0)$, чем к точке $(-4, 4, 0)$. Какой геометрической фигурой является это множество?

88. Известно, что множество S состоит из всех точек M, лежащих на координатной плоскости xy и удовлетворяющих соотношению $3\rho(M, A) < \rho(M, B)$, где $A(0, 1, 3)$, $B(0, 9, 5)$. Определите множество S алгебраическим соотношением для координат его точек. Какой геометрической фигурой является это множество?

89. Отмечены точки $A(1, 0, 3)$, $A_1(1, 0, 0)$, $B(4, 0, 3)$, $B_1(4, 0, 0)$. Задайте алгебраическим соотношением множество всех точек M, удовлетворяющих соотношению $2 \sin \widehat{AMA_1} = \sin \widehat{BMB_1}$.

§ 15. Параметрическое и общее уравнение плоскости. Всякую плоскость в пространстве можно задать, указав какую-нибудь лежащую на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два произвольных приложенных к этой точке неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$. Плоскость состоит из всех точек M, удовлетворяющих соотношению $\overrightarrow{M_0M} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$, где s, t — произвольные числа (рис. 38). В координатной форме для $M(x, y, z)$ имеем:

$$\begin{cases} x=x_0+sa_1+tb_1, \\ y=y_0+sa_2+tb_2, \\ z=z_0+sa_3+tb_3. \end{cases}$$

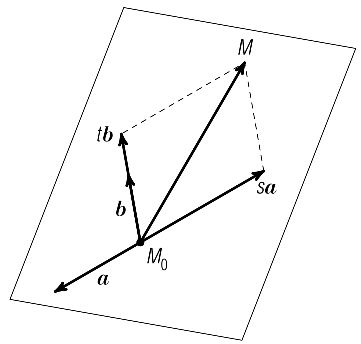

Рис. 38

Эта тройка уравнений называется *параметрическим уравнением плоскости*. По векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно найти вектор $\boldsymbol{n}(n_1, n_2, n_3)$, перпендикулярный к плоскости. Он находится с помощью операции векторного произведения: $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, т. е.

$$n_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad n_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad n_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Произвольная точка $M(x, y, z)$ плоскости задаётся уравнением $(\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{n})=0$ или

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{6}$$

где $A=n_1$, $B=n_2$, $C=n_3$, $D=-n_1x_0-n_2y_0-n_3z_0$.

Уравнение (6) называется *общим уравнением плоскости.*

Коэффициенты уравнения (6) A, B, C задают координаты вектора, перпендикулярного к плоскости.

Зная общие уравнения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, можно найти угол между этими плоскостями. Для этого нужно взять перпендикулярные к ним векторы $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ и найти угол φ между прямыми, на которых лежат эти вектора.

Напомним, что $\cos\varphi=\frac{|(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$, откуда

$$\varphi=\arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Упражнения

90. Даны точки $M_1(0, -1, 3)$ и $M_2(1, 3, 5)$. Напишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

91. Напишите общее уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $M_1(0, 1, 3)$ и $M_2(2, 4, 5)$.

92. Найдите плоскость, проходящую через точку $A(2, 2, -2)$ и параллельную плоскости $x-2y-3z=0$.

93. Напишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, -1, 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

94. Найдите угол между плоскостями $x-2y+2z-8=0$ и $x+z-6=0$.

95. Напишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(2, 1, 2)$, $M_3(1, 1, 4)$.

§ 16. Параметрическое и общие уравнения прямой. Прямую в пространстве можно определить, указав какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на ней, и вектор $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$, параллельный даннной прямой. Прямая будет состоять из всех точек M, удовлетворяющих равенству $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{u}$, где t — произвольное число (рис. 39).

В координатной форме для $M(x, y, z)$ имеем:

$$\begin{cases} x=x_0+tu_1,\\ y=y_0+tu_2,\\ z=z_0+tu_3.\end{cases}$$

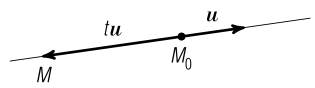

Рис. 39

Эта тройка числовых уравнений называется *параметрическим уравнением прямой.*

Другой способ задания прямой состоит в представлении её в виде пересечения двух плоскостей. Пусть заданы две плоскости уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{(плоскость } \alpha_1\text{)},$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \quad \text{(плоскость } \alpha_2\text{)}$$

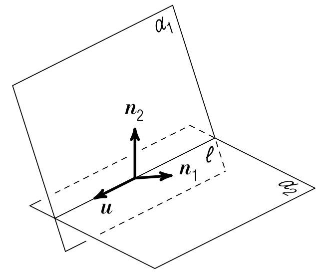

Рис. 40

и векторы $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ не коллинеарны. Тогда пересечение этих плоскостей задаёт некоторую прямую l (рис. 40), и координаты произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей этой прямой, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

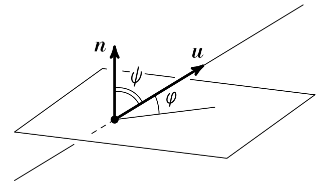

Рис. 41

Эти уравнения называются общими уравнениями прямой. Из этой системы можно найти вектор, параллельный прямой. Для этого нужно взять перпендикулярные к плоскостям векторы $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. Векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ перпендикулярны прямой l, а вектор $\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$ параллелен ей, так как он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$.

Зная координаты вектора $\boldsymbol{u}(u_1, u_2, u_3)$, параллельного прямой, и общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, можно найти величину угла φ между прямой и плоскостью. Для этого возьмём вектор $\boldsymbol{n}(A, B, C)$, перпендикулярный к плоскости. Сумма величин углов между прямой и плоскостью (φ) и между векторами $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{n}$ (ψ) равна $\pi/2$, если они оба направлены в одну сторону от плоскости (рис. 41).

Поэтому $\sin\varphi=|\cos\psi|=\left|\frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|$, откуда

$$\varphi=\arcsin\frac{|u_1A+u_2B+u_3C|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Упражнения

96. Напишите параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+y+4z-14=0. \end{cases}$$

97. Найдите вектор, параллельный прямой

$$\begin{cases} x=4, \\ z=y. \end{cases}$$

98. Найдите угол между прямой

$$\begin{cases} x=2z-1, \\ y=-2z+1. \end{cases}$$

и прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1, -1, -1)$.

99. Найдите угол между прямыми

$$\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$$

100. Найдите угол между прямой

$$\begin{cases} x=-z+1, \\ y=2 \end{cases}$$

и плоскостью $y=z$.

101. Напишите общее уравнение плоскости, проходящей через точку $N(-1, 2, -3)$ и перпендикулярной прямой

$$\begin{cases} x=2, \\ y-z=1. \end{cases}$$

102. Напишите общее уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+2t, \\ z=-1+3t \end{cases}$$

и точку $A(3, 4, 0)$.