Канунников Андрей Леонидович, Кузнецов Степан Львович. Комбинаторика: Методическая разработка для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009 — 31 с., илл.

Как пользоваться брошюрой

После ознакомления с теоретической частью, помещённой в преамбуле каждого параграфа, и разбора демонстрационных примеров, приступайте к решению обязательных задач (они отмечены галочками). Остальные задачи решать не надо. Они становятся обязательными в случае получения неудовлетворительной оценки. Впрочем, если обязательные задачи у Вас получаются с трудом, мы рекомендуем для закрепления материала порешать близкие задачи из числа необязательных, но высылать их решения не нужно.

Возле номера некоторых задач указана их степень трудности (относительно задач того же параграфа):
$^\circ$ — простая задача;
* — трудная задача.

Если Вы справились с обязательными задачами, мы рекомендуем порешать дополнительные, за которые ставится отдельная оценка. Они отмечены знаком * и, как правило, не уступают по сложности задачам, отмеченным знаком *.

В конце брошюры приведены некоторые общематематические обозначения, которыми мы пользоваться.

Если у Вас возникнут вопросы при чтении брошюры или появятся замечания по её содержанию, присылайте их вместе с решёнными задачами на отдельном листе.

Желаем удачи!

§ 1. Основные приёмы

При решении задач этого параграфа специальных знаний не требуется. Основная цель — освоиться с базовыми принципами, которые применяются в комбинаторике.

Пример. В классе 10 девочек и 15 мальчиков. Сколькими способами можно назначить двух дежурных — мальчика и девочку?

Решение. Сначала назначим дежурного-мальчика. В пару к нему можно выбрать любую из десяти девочек. Значит, существует 10 способов назначить пару дежурных, в которую входит выбранный мальчик. А поскольку мальчиков всего 15, общее число способов равно $15 \cdot 10$.

Ответ: 150.

Пример. В русской азбуке 33 буквы. Сколько существует слов а) из двух букв; б) из трёх букв (в том числе не имеющих смысла)?

Решение. а) Зафиксируем первую букву слова. Вторую букву можно выбрать 33 способами. Поэтому число двухбуквенных слов, начинающихся с данной буквы, равно 33. Следовательно, общее число двухбуквенных слов равно $33 \cdot 33$.

б) Опять зафиксируем первую букву. Оставшиеся две буквы образуют двухбуквенное слово, а количество таких слов мы уже знаем — оно равно 33^2. Поэтому всего трёхбуквенных слов $33 \cdot 33^2$.

Ответ: а) 33^2; б) 33^3.

Обобщая эти примеры, получаем следующий принцип (*правило умножения*): если первый объект можно выбрать m способами, и при любом его выборе второй объект можно выбрать n способами, то количество способов выбрать пару из этих двух объектов равно mn.

Пример. Из пункта А в пункт Б ведут две дороги, а из Б в В — четыре (см. рис. 1). Сколькими способами можно проехать из А в В?

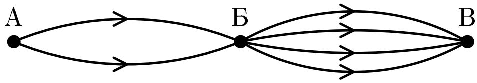

Рис. 1

Решение. То, что спрашивается, равно $2 \cdot 4$.

Ответ: 8.

Пример. Тот же вопрос для рис. 2.

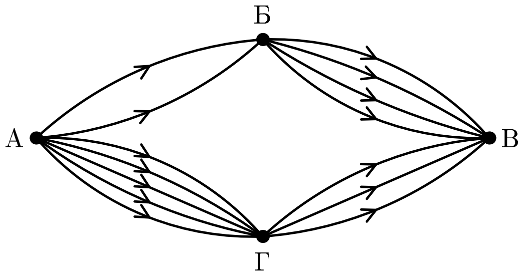

Рис. 2

Решение. Пути из А в В бывают двух видов: 1) идущие через Б, 2) идущие через Г. Путей первого вида $2 \cdot 4$, второго — $5 \cdot 3$. Значит, путей из А в В всего $2 \cdot 4 + 5 \cdot 3$.

Ответ: 23.

Иногда бывает проще посчитать число объектов, *не* обладающих требуемым свойством, и вычесть это число из общего количества.

Пример. Сколько трёхзначных чисел содержат в своей записи хотя бы одну чётную цифру?

Решение. Всего трёхзначных чисел $9 \cdot 10^2$ (на первом месте может стоять любая из 9 цифр, а на втором и третьем — любая из 10), среди них 5^3 чисел, состоящих только из нечётных цифр (в каждом разряде может стоять любая из 5 нечётных цифр), а всех остальных (количество которых и надо найти) $9 \cdot 10^2 - 5^3$.

Ответ: 775.

При подсчёте объектов в той или иной комбинаторной задаче зачастую можно совершить не только арифметическую, но и логическую ошибку. К примеру, правдоподобное с виду рассуждение может привести к тому, что какие-то объекты будут посчитаны несколько раз. Поэтому мы рекомендуем (особенно на первых порах) после получения ответа проверять его[1] в частных случаях.

Пример. На плоскости отмечены n точек и каждые две из них соединены отрезком. Сколько всего проведено отрезков?

---

[1] А хорошо бы ещё проверять правильность самих рассуждений!

На первый взгляд всё просто: поскольку каждая из n точек соединяется отрезком с каждой из остальных $n-1$ точкой, то общее число отрезков равно $n(n-1)$. Однако уже при $n=2$ этот ответ неверен. В чём же дело?

А дело в том, что мы посчитали каждый отрезок *дважды*: сначала при подсчёте отрезков, выходящих из одного его конца, а потом — из другого. Значит, на самом деле посчитано удвоенное число отрезков, а правильный ответ такой: $n(n-1)/2$.

Пример. У правильного октаэдра 6 вершин, из каждой вершины выходит 4 ребра и все грани — правильные треугольники. Сколько рёбер и сколько граней у правильного октаэдра?

Решение. 1. Умножив число вершин на число рёбер, выходящих из каждой вершины, получим удвоенное число всех рёбер, которых, таким образом, $6 \cdot 4/2 = 12$.

2. Поскольку каждая грань ограничена тремя рёбрами и каждое ребро является общим для двух граней, то граней у октаэдра $12 \cdot 2/3 = 8$.

Ответ: 12, 8.

В разобранном примере при подсчёте числа рёбер мы применили то же рассуждение, что и в предыдущем примере. Объясним подробнее подсчёт числа граней. Разрежем октаэдр по всем рёбрам и получим *г* треугольников (*г* — искомое число граней) (см. рис. 3). Общее число сторон этих треугольников будет в два раза больше числа рёбер октаэдра (после разреза каждое ребро заменено на два *берега разреза*) и в три раза больше числа его граней. Отсюда и получаем уравнение $2 \cdot 12 = 3г$.

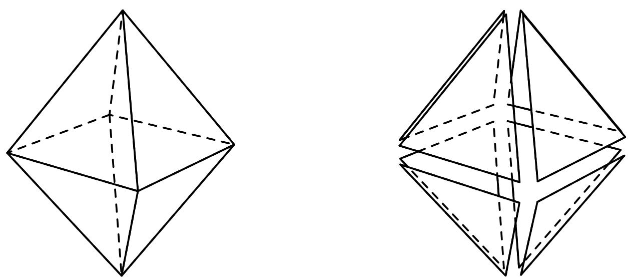

Рис. 3

Пример. Может ли каждый из 9 участников шахматного турнира сыграть в нём по 3 партии?

Решение. Число сыгранный партий в таком турнире должно быть $9 \cdot 3/2$, что невозможно, т. к. это число не целое.

Ответ: нет.

Задачи

√ **1°.** Имеется 6 чашек и 2 блюдца. Сколькими способами можно выбрать набор из чашки и блюдца?

2°. В киоске продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

√ **3.** Сколькими способами можно добраться из А в Е по дорогам, изображённым на рис. 4?

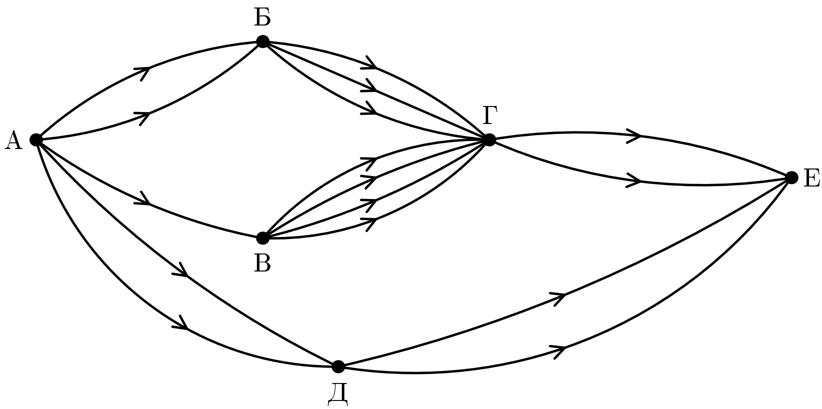

Рис. 4

4. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых нет цифр 0 и 8?

√ **5.** Сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

6. Сколькими способами в классе из 30 человек можно выбрать двух дежурных?

√ **7.** а) 10 дипломатов обменялись рукопожатиями (каждые два пожали друг другу руку). Сколько было рукопожатий?

б) 10 дипломатов сели за круглый стол и рукопожатиями обменялись только соседи. Сколько было рукопожатий?

$\surd$ **8*.** а) У правильного додекаэдра 12 граней и все они — правильные пятиугольники. Зная, что из каждой вершины выходит по 3 ребра[1], найти число вершин и число рёбер додекаэдра.

б) У правильного икосаэдра 12 вершин, 20 граней и 30 рёбер, все грани — правильные n-угольники и из каждой вершины выходит по m рёбер. Найти m и n.

9°. Круглый торт украшен по периметру восемью розочками разного цвета. Сколькими способами его можно разрезать на две части, проводя разрез через две розочки?

$\surd$ **10.** а) У n-угольника 9 диагоналей. Найти n.

б) Может ли у многоугольника быть 10 диагоналей?

$\surd$ **11.** На окружности отмечены 30 синих и 25 зелёных точек. Рассмотрим всевозможные отрезки хорды с концами в отмеченных точках. У скольких отрезков концы а) разного цвета; б) одинакового цвета?

§ 2. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле обычно формулируют следующим образом: „Если 10 кроликов рассажены по 9 клеткам, то хотя бы в одной клетке сидит более одного кролика".

Доказательство этого утверждения[2] проводится от противного: если бы в каждой клетке было не более одного кролика, то всего бы их было не более 9, а их 10 — противоречие.

Следующие два примера непосредственно решаются при помощи принципа Дирихле.

Пример. В школе учатся 400 человек. Доказать, что хотя бы у двоих из них дни рождения в один день.

Решение. Утверждение следует из того, что дней в году 365 или 366, что в любом случае меньше 400.

Пример. Доказать, что хотя бы у двоих учеников класса фамилии начинаются с одной и той же буквы, если всего в классе

[1] Этот факт вытекает из предыдущего условия, но мы сейчас не будем отвлекаться на геометрию.

[2] И аналогичных ему.

а) 34 ученика;

б) 31 ученик (все фамилии — русские).

Решение. а) В русском алфавите 33 буквы; это меньше числа учеников.

б) С букв „ъ”, „ы” и „ь” слова не начинаются, так что остаётся 30 букв.

Рассмотрим чуть более сложный

Пример. 15 ребят собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них набрали одинаковое число орехов.

Решение. Предположим, что все ребята набрали разное число орехов. Тогда общее число набранных орехов не меньше $0+1+2+\ldots+14 = \frac{14\cdot 15}{2} = 105 > 100$ — противоречие.

Пример. В классе из 25 учеников среди любых троих есть двое друзей. Доказать, что хотя бы один из учеников дружит по меньшей мере с 12 одноклассниками.

Решение. Возьмём двух учеников, которые не дружат друг с другом (если таких нет, то утверждение задачи, очевидно, выполняется) и рассмотрим всевозможные тройки, в которые входят эти двое. Получим, что каждый из 23 остальных учеников дружит хотя бы с одним из этих двоих, а значит, с кем-то из них дружит не менее 12 учеников.

Принцип Дирихле применяется и в геометрии. Вот его аналог.

Если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммарной длиной, большей 1, то хотя бы два из этих отрезков имеют общую внутреннюю точку.

Понятно, что аналогичное утверждение можно сформулировать для градусных мер углов, для площадей и объёмов фигур и т. п.

Пример. На плоскости проведено n прямых, никакие две из которые не параллельны. Доказать, что угол между какими-то двумя из них не больше $\frac{180^\circ}{n}$.

Решение. Для удобства параллельно перенесём прямые так, чтобы они пересекались в одной точке. Тогда эти прямые разобьют плоскость на $2n$ углов, в сумме дающих 360°. Значит, хотя бы один из этих углов не больше $\frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$.

Задачи

12°. Можно ли 60 монет разложить по 12 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали разное количество монет?

$\surd$ **13°.** 34 пассажира едут в автобусе, который делает всего 9 остановок, причём новые пассажиры ни на одной из них не входят. Доказать, что найдутся две остановки, на которых выйдет одинаковое число пассажиров (возможно, ни одного).

14°. 25 покупателей купили 80 арбузов. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что хотя бы один покупатель купил не менее 4 арбузов?

$\surd$ **15°.** Десять студентов составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по 1, 2 и 3 задачи. Доказать, что хотя бы один студент составил не менее 5 задач.

$\surd$ **16.** Доказать, что из 82 разноцветных шаров можно выбрать или 10 шаров разных цветов, или 10 шаров одного цвета.

$\surd$ **17.** Доказать, что в любом классе найдутся два школьника, имеющие одинаковое количество друзей в этом классе.

$\surd$ **18°.** Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Доказать, что какие-то два мужчины сидят напротив друг друга.

$\surd$ **19.** Суша занимает больше половины поверхности планеты Зямлям. Доказать, что зямлямитяне смогут прокопать прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей.

$\surd$ **20.** Существует ли таблица 100×100, заполненная -1, 0, 1, такая, что все суммы по строкам, по столбцам и по двум большим диагоналям различны?

$\surd$ **21*.** 30 студентов со всех пяти курсов составили 40 задач. Любые два однокурсника придумали одинаковое количество задач, любые два студента с разных курсов придумали разное количество задач. Сколько студентов придумали по одной задаче?

22*. Шестеро друзей решили в воскресенье побывать в семи кинотеатрах, сеансы в которых начинаются в 9, 10, 11, ..., 18 и 19 часов. На каждый сеанс двое из них шли в один кинотеатр, остальные в другой. Вечером выяснилось, что каждый из них побывал в этот день во всех семи кинотеатрах. Доказать, что в каждом из семи кинотеатров хотя бы на одном сеансе не был никто из друзей.

√ **23***. Школьник в течение года каждый день решает хотя бы по одной задаче. Каждую неделю он решает не более 12 задач. Доказать, что найдётся несколько последовательных дней, в которые он решает ровно 20 задач.

24★. У каждого из 33 учеников спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев. Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые от 0 до 10 включительно. Доказать, что в классе есть два ученика с одинаковым именем и фамилией.

25★. Дан правильный 45-угольник. Можно ли в его вершинах расставить цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

√ **26°.** Доказать, что правильный треугольник нельзя покрыть двумя меньшими правильными треугольниками.

27. Покрывается ли квадрат со стороной 1,5 тремя квадратами со стороной 1?

√ **28.** Доказать, что у любого многогранника найдутся две грани, имеющие одинаковое число сторон.

29★. а) На прямую капнула клякса длины больше 1. Доказать, что существуют такие точки a и b внутри кляксы, что $a - b$ — целое число.

б) На плоскость Oxy капнула клякса площади больше 1. Доказать, что существуют такие точки кляксы $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$, что $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$ — целые числа.

30★. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно полностью покрыть круг радиуса 2? (Круги могут накладываться друг на друга и выступать за край большого круга.)

31★. У Васи 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Васи?

§ 3. Перестановки

Для начала рассмотрим простой пример.

Пример. Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове ДУБ?

Решение. На первое место можно поставить любую из трёх букв, на второе — любую из двух оставшихся, а буква на третьем месте уже определена однозначно. По правилу умножения получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ответ: 6.

Способ поставить в ряд n различных объектов называется *перестановкой* этих объектов. В нашем примере существует 6 перестановок букв слова ДУБ: ДУБ, ДБУ, УДБ, УБД, БДУ, БУД.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n. Вычисление P_n аналогично решению примера: на первое место можно поставить любой из n объектов, на второе — любой из $n-1$ оставшихся, ..., на предпоследнее — любой из двух оставшихся и, наконец, последнее место останется для последнего объекта. Значит, $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *факториалом* числа n и обозначается $n!$ (читается «эн факториал»): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Для удобства считают $0! = 1! = 1$. Итак,

$$P_n = n!. \tag{1}$$

Пример. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ЗАДАЧА?

Этот пример отличается от предыдущего тем, что теперь в слове есть одинаковые буквы, а именно, буква А встречается 3 раза.

Решение. Будем временно различать буквы А, пометив их индексами: ЗА_1ДА_2ЧА_3. Число способов переставить буквы в таком слове равно числу перестановок из 6 элементов, т. е. $6!$. Теперь, если стереть метки 1, 2, 3, то перестановки, отличающиеся только порядком букв А, станут одинаковыми. Таким образом, каждую перестановку мы посчитали $3!$ раз (это число способов переставить буквы А_1, А_2 и А_3). Поэтому искомое количество равно $6!/3! = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Ответ: 120.

Пример. Сколькими способами можно переставить буквы в слове КОЛОКОЛ?

Решение. Всего в слове 7 букв. Взяв $P_7 = 7!$, мы посчитаем каждую перестановку $3! \cdot 2! \cdot 2!$ раз (число способов переставить буквы К равно $3!$, О и Л — по $2!$). Отсюда получаем ответ $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$.

Ответ: 210.

Эти два примера иллюстрируют понятие *перестановки с повторениями*. Рассмотрим общий случай. Пусть есть k_1 предметов 1-го типа, k_2 — 2-го, …, k_m — m-го типа. Способ поставить эти $n = k_1+k_2+\ldots+k_m$ предметов в ряд называется перестановкой из n элементов с заданным числом повторений k_1, k_2, …, k_m. Число таких перестановок обозначается $\bar{P}_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ и вычисляется по формуле

$$\bar{P}_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{(k_1+\ldots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}, \tag{2}$$

вывод которой аналогичен решению только что разобранных примеров.

Пример. Сколькими способами можно раздать все 28 костей домино 4 игрокам?

Решение. Занумеруем игроков и отметим каждую кость номером игрока, который получает эту кость. Получим перестановку чисел 1, 2, 3, 4, в которой каждое число встречается $28/4 = 7$ раз. Ясно, что искомое число способов раздать кости равно числу перестановок с повторениями $\bar{P}_{7,7,7,7} = \frac{28!}{(7!)^4}$.

Ответ: $\frac{28!}{(7!)^4}$.

Пример. В детском саду тарелки украшены по периметру кружками. Всего кружков на каждой тарелке 7 и все они разных цветов. Сколько существует тарелок, раскрашенных *по-разному*?

Решение. Возьмём ещё не раскрашенную тарелку и украсим её одним кружком любого из 7 цветов. Останется нарисовать ещё 6 кружков остальными цветами. Это можно сделать 6! способами.

Ответ: 720.

Можно было рассуждать иначе. По каждой из 7! перестановок 7 цветов определим раскраску тарелки так: кружки расположим по часовой стрелке в соответствии с перестановкой. Легко видеть, что перестановки, получающиеся друг из друга *циклическими сдвигами*, определяют одну и ту же раскраску тарелки (ведь не важно, с какого цвета начинать раскраску!). Всего же перестановок, определяющих одну и ту же раскраску, 7 (на первом месте может стоять любой из 7 цветов, остальные определяются однозначно). Значит, число способов раскрасить тарелку (или, что то же, число по-разному раскрашенных тарелок) равно $7!/7 = 6!$.

Пример. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба в 6 разных цветов? (Раскраски, переходящие друг в друга при вращении куба, считаются одинаковыми.)

Решение. Всего существует 6! способов раскрасить неподвижный куб. Возьмём какой-нибудь раскрашенный куб и будем считать, что цвет его нижней грани синий. Посчитаем число кубов с синей нижней гранью, раскрашенных так же. Это — кубы, полученные из данного поворотами вокруг вертикальной центральной оси на углы $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ — всего 4 куба. Далее в синий цвет может быть покрашена любая из 6 граней, и вращением всегда можно добиться, чтобы она стала нижней. По правилу умножения получаем $4 \cdot 6$ кубов, раскрашенных одинаково. Значит, различных раскрасок всего $\frac{6!}{4\cdot 6} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Ответ: 30.

Задачи

32°. Сколько слов (в том числе бессмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове

а) „математика";

б) „геометрия"?

В каком случае больше перестановок?

√ **33.** Сколькими способами могут встать в круг n человек, если расстановки, в которых у каждого человека соседи одни и те же, но в другом порядке, считаются а) разными; б) одинаковыми?

34★. Пусть $P_n(k)$ — число перестановок n объектов, оставляющих ровно k из них на своих местах. Доказать, что $P_n(1)+2P_n(2)+\ldots+nP_n(n) = n!$.

√ **35°.** Сколько ожерелий можно составить из

а) 10 одинаковых бусинок;

б) 5 одинаковых одного цвета и двух одинаковых другого цвета;

в) 4 синих, 3 красных и 2 белых одного размера?

(Ожерелья считаются одинаковыми, если их можно получить друг из друга поворачиванием и переворачиванием.)

36. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить в разные цвета грани

а)° правильного тетраэра (правильной треугольной пирамиды);

√ б)* правильного октаэдра (см. рис. 3);

в)★ правильного додекаэдра и правильного икосаэдра (см. задачу 8)?

√ **37.** Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба в два цвета?

√ **38.** Если написать цифры от 0 до 9 на листе бумаги и перевернуть его, то цифры 0, 1 и 8 не изменятся, цифры 6 и 9 перейдут друг в друга, а остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует n-значных чисел, которые после переворачивания

а) не меняются;

б) теряют смысл?

(Допускается, что число начинается с нуля.)

§ 4. Размещения

Вернёмся ко второму примеру из § 1 и обобщим его. Пусть в алфавите n букв и нужно составить k-буквенное слово. Сколькими способами это можно сделать? Считаем: на каждую из k позиций в слове можно поставить любую из n букв, итого n^k слов. Упорядоченная выборка длины k из объектов n типов называется *размещением с повторениями* из n по k; число таких размещений равно n^k.

Понятие *размещения без повторений* объясним на следующем примере.

Пример. На школьном собрании выбирают старосту, помощника старосты и дежурного (причём это должны быть разные люди). Сколькими способами это можно сделать, если в классе учится 30 человек?

Решение. Старостой может быть любой из 30 человек, помощником старосты — любой из 29 остальных и дежурным — любой из 28 оставшихся. Всего $30 \cdot 29 \cdot 28$ способов.

Ответ: $30 \cdot 29 \cdot 28$.

Пусть теперь даны n объектов и число k от 0 до n. Размещением (без повторений) из n элементов по k называется *упорядоченная* выборка длины k из этих n объектов, где каждый объект встречается по одному разу. Число таких размещений обозначается A_n^k и, по аналогии с только что разобранным примером, вычисляется так:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{3}$$

В частности, при $k = n$ получаем число перестановок: $A_n^n = P_n$; при $k = 0$ получаем единственную пустую выборку: $A_n^0 = 1$.

Задачи

√ **39°.** Буквы азбуки Морзе образуются как последовательности точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, используя коды, содержащие а) 7 символов; б) не более 7 символов, но не менее 1?

40°. Сколькими способами в футбольной команде из 11 человек можно выбрать вратаря и центрального нападающего?

41°. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт по одной карте а) каждой масти; б) каждого достоинства; в) каждой масти, причём все выбранные карты должны быть разного достоинства?

42. Можно ли, используя 3 цвета, по-разному раскрасить стороны 50 правильных пятиугольников? (Каждая сторона должна быть покрашена в один цвет; можно использовать не все цвета; раскраски, получающиеся друг из друга поворотом вокруг центра, считаются одинаковыми.)

√ **43.** Автомобильные номера состоят из одной, двух или трёх букв и четырёх цифр (сначала идут буквы, затем — цифры). Найти число таких номеров, если используются 10 цифр и 33 буквы.

44. В комнате общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек, причём все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга. Сколькими способами студенты могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдце и ложку)?

√ **45*.** В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга пронумеровать их в порядке, отражающем их выступление в соревновании. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой *доле* случаев победитель соревнования будет определён?

√ **46*.** а) Найти сумму всех трёхзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5.

б) Тот же вопрос при условии, что в записи каждого числа нет одинаковых цифр.

√ **47.** Сколько существует четырёхзначных чисел, кратных 4 и составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

§ 5. Сочетания

отличаются от размещений тем, что в них не важен порядок выбранных объектов. Иными словами, сочетанием из n по k называется *неупорядоченная* выборка, содержащая какие-то k из этих n объектов, или k-элементное подмножество данного n-элементного множества объектов. Число сочетаний из n по k обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$ (мы будем придерживаться первого обозначения).

Поскольку неупорядоченную k-элементную выборку можно упорядочить $P_k = k!$ способами, число A_n^k размещений в $k!$ раз больше числа C_n^k сочетаний, откуда с учётом (3) получаем формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \tag{4}$$

Например, трёх человек из тридцати можно выбрать $\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1}$ способами.

Сравнивая полученную формулу для числа сочетаний с формулой (2), можно заметить, что $C_n^k = \bar{P}_{k,\,n-k}$. Это не случайно. Действительно, каждому сочетанию из n по k можно сопоставить строку длины n из нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит единица, если i-й элемент входит в сочетание, и ноль, если не входит. Значит, C_n^k равно числу строк из k единиц и $n-k$ нулей, а это и есть $\bar{P}_{k,\,n-k}$. Это рассуждение является ещё одним способом доказательства формулы (4).

Бином Ньютона. Раскроем скобки в выражении

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n\ \text{скобок}}.$$

Поскольку из каждой скобки можно взять любую из двух букв, а всего скобок n, при их раскрытии получится сумма 2^n слагаемых, каждое из которых имеет вид $a^{n-k}b^k$ для некоторого k от 0 до n. Приведём подобные. Коэффициент при слагаемом $a^{n-k}b^k$ (при фиксированном k) равен числу способов взять из n скобок k букв b, т. е. C_n^k. Итак, получаем формулу

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n, \tag{5}$$

называемую формулой *бинома Ньютона*. Поэтому числа C_n^k называются ещё и *биномиальными коэффициентами*.

В частных случаях $n = 2$ и $n = 3$ равенство (5) превращается в формулы сокращённого умножения (квадрат суммы и куб суммы):

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; при $n = 0$ и $n = 1$ получаются тривиальные равенства.

Свойства биномиальных коэффициентов. Следующие свойства (а также тождества с биномиальными коэффициентами, оставленные в качестве задач в конце параграфа) могут быть доказаны при помощи формулы (4). Однако многие из них можно доказать гораздо изящнее при помощи комбинаторных рассуждений или бинома Ньютона.

Симметрия: $C_n^k = C_n^{n-k}$. Действительно, всякая k-элементная выборка из n элементов однозначно определяет выборку из $n-k$ остальных элементов. Так же просто это видно и из формулы (4), в которой при замене k на $n-k$ меняются местами факториалы в знаменателе.

Основное биномиальное тождество: $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$. Возьмём n белых и один чёрный шар и посчитаем, сколькими способами можно выбрать из них k шаров. С одной стороны, это число равно C_{n+1}^k. С другой стороны, все выборки можно разделить на две группы: содержащие чёрный шар (таких C_n^{k-1}) и не содержащие (таких C_n^k).

Сумма биномиальных коэффициентов: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$. Эту формулу можно получить подстановкой $a = b = 1$ в бином Ньютона. Есть и другой — комбинаторный — способ доказательства. Посчитаем число подмножеств n-элементного множества. С одной стороны, все подмножества можно классифицировать по количеству элементов; т. к. k-элементных подмножеств ровно C_n^k, всего подмножеств будет $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$. С другой стороны, любое подмножество определяется тем, какие элементы в него входят, а какие нет. Поскольку для каждого из n элементов исходного множества есть две возможности: входить или не входить в подмножество, подмножеств всего 2^n.

Пример. Доказать тождество $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Решение. Число C_{2n}^n равно числу способов выбрать n шаров из $2n$. Посчитаем это число способов по-другому. Покрасим n шаров в белый цвет и n в чёрный. Тогда выборок, содержащих k белых и $n-k$ чёрных шаров, по правилу произведения $C_n^k C_n^{n-k}$. Остаётся просуммировать эти выражения по всем k от 0 до n и учесть, что $C_n^{n-k} = C_n^k$.

Пример[1]**.** Вычислить $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots + (-1)^{[n/2]} C_n^{2[n/2]}$.

(Запись $[x]$ означает *целую часть* числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

[1] Для тех, кто знаком с комплексными числами.

Решение. Преобразуем выражение $(1+i)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Re}(1+i)^n = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots + (-1)^{[n/2]} C_n^{[n/2]},$$

т. к. $i^{2k} = (-1)^k$, $i^{2k+1} = (-1)^k i$.

С другой стороны, по формуле Муавра

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)^n = 2^{n/2}\left(\cos\tfrac{\pi n}{4} + i\sin\tfrac{\pi n}{4}\right).$$

Ответ: $2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}$.

В следующем примере для быстрого подсчёта суммы мы применим стандартный трюк: искомую сумму удвоим и в полученном выражении сгруппируем слагаемые парами (первое с последним, второе — с предпоследним и т. д.). Это самый простой способ *воспользоваться* симметрией биномиальных коэффициентов.

Пример. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, C_n^k = 0C_n^0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$.

Решение. Пусть искомая сумма равна S. Тогда т. к. $C_n^k = C_n^{n-k}$, то

$$S = (0C_n^0 + nC_n^n) + (C_n^1 + (n-1)C_n^{n-1}) + \ldots + (nC_n^n + 0C_n^0) = \\ = n(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n) = n2^n,$$

следовательно, $S = n2^{n-1}$.

Ответ: $n2^{n-1}$.

Иногда перед удвоением суммы к ней нужно прибавить (или из неё вычесть) ещё какие-то слагаемые для последующей группировки. В только что разобранном примере мы это сделали в самом задании, приписав в начале нулевое слагаемое.

Тот же приём может быть использован и для знакопеременных сумм. При этом если возникают трудности с множителем $(-1)^n$, то всегда можно разобрать два случая: n — чётное и n — нечётное.

Иногда числовой множитель перед биномиальным коэффициентом можно спрятать внутрь него, расписав биномиальный коэффициент через факториалы, например:

$$\frac{n+1}{k+1} C_n^k = \frac{(n+1)\,n!}{(k+1)\,k!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Треугольник Паскаля. Основное биномиальное тождество позволяет расположить биномиальные коэффициенты в виде бесконечной треугольной таблицы, изображённой на рис. 5. В ней по краям стоят единицы, а внутри каждое число равно сумме двух чисел над ним. Коэффициент C_n^k находится на k-м месте в n-й строке этой таблицы, если считать с нуля, а сама таблица называется *треугольником Паскаля.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Рис. 5

Треугольник Паскаля упрощает практическое вычисление биномиальных коэффициентов при малых n и k.

Сочетанием с повторениями из n по k называется неупорядоченная k-элементная выборка из n объектов, в которой некоторые объекты могут встречаться по несколько раз. Число сочетаний с повторениями из n по k обозначается $\bar{C}_n^k$.

Чтобы вывести формулу для $\bar{C}_n^k$, посчитаем, сколькими способами можно разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам. Занумеруем ящики числами от 1 до n и на каждом шаре напишем номер ящика, в который мы его собираемся положить. Получится набор (неупорядоченный — ведь шары одинаковы) из k чисел от 1 до n, т. е. сочетание с повторениями из n по k, число которых мы обозначили $\bar{C}_n^k$.

Теперь выложим наши k шаров в ряд и расставим перегородки, разделяющие ящики: шары от левого края до первой перегородки кладём в первый ящик, от первой перегородки до второй — во второй, ..., от последней перегородки до правого края — в n-й (рис. 6).

У нас есть $n+k-1$ место, на которых может быть либо шар, либо перегородка, причём на k местах находятся шары. Значит, искомое число способов равно C_{n+k-1}^k. Итак,

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

Рис. 6

Задачи

48°. Доказать, что $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ делится на $k!$.

49°. Найти все n такие, что

√ а) $C_n^3 = C_n^8$;

б) $C_n^5 = C_n^{10}$.

50. На плоскости отмечены n точек и через каждые две из них проведена прямая, причём никакие две прямые не параллельны и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Найти число всех точек пересечения этих прямых.

√ **51*.** Через центр сферы проведено несколько плоскостей. Окружности, получающиеся в сечении сферы этими плоскостями, пересекаются в 22 точках, причём в 12 из них пересекаются по две окружности, а в остальных 10 — по три. Сколько всего проведено плоскостей?

52°. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в первой команде было 4 мальчика и 3 девочки?

53°. Из отряда солдат в 50 человек ежедневно назначают в караул четырёх человек. Сколько существует способов составить караул и сколько раз одному и тому же солдату придётся быть в карауле?

54°. В архипелаге каждый остров соединён ровно с семью другими. Сколько в этом архипелаге островов, если мостов — 84?

55. а) Автобусный билет считается счастливым, если первые три цифры его шестизначного номера нечётны и различны, а вторые три — чётны, причём цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует счастливых номеров?

√ б) Автобусный билет считается счастливым, если в его номере не встречается число 13 и все цифры идут в порядке возрастания. Сколько существует счастливых номеров? (Номер может начинаться с нуля.)

√ **56°.** Вычислить знакопеременную сумму биномиальных коэффициентов: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

57. Вычислить[1]

а) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots + C_n^{4[n/4]}$;

$\surd$ б) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$.

58. Вычислить

$\surd$ а)$^\circ$ $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k$;

б)$^\circ$ $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k$;

$\surd$ в)* $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}kC_n^k$;

г)* $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$;

д)$^\bigstar$ $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k$;

е)$^\bigstar$ $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$.

$\surd$ **59.** В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом (все места занумерованы). Из 10 пассажиров четверо хотят сесть по ходу поезда, трое — против движения, а остальным всё равно. Сколькими способами могут разместиться пассажиры в соответствии со своими пожеланиями?

$\surd$ **60.** Берутся все кости „обобщённого домино” (от $0|0$ до $n|n$).

а) Доказать, что число костей с суммой очков $n-k$ равно числу костей с суммой очков $n+k$.

б) Найти общее число костей такого домино.

61. а) Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если среди них есть двое, которых нельзя выбирать вместе?

$\surd$ б) Сколькими способами можно выбрать m человек из n так, чтобы данные p человек не были выбраны вместе.

62. Сколько можно составить пятибуквенных слов из 7 гласных и 20 согласных букв, если гласные должны чередоваться с согласными и

а) буквы могут повторяться;

б) буквы не могут повторяться.

$\surd$ **63.** Найти количество делителей натурального числа $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}$, разложенного на простые множители (все p_i — попарно различные простые числа, а k_i — натуральные).

$\surd$ **64*.** Доказать формулу $C_{n+m}^k = \sum\limits_{l=0}^{k} C_n^l C_m^{k-l}$ (*свёртка Вандермонда*).

[1] См. сноску на с. § 5

65★. Доказать *полиномиальную формулу*:

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=n \\ k_1,\ldots,k_m \geqslant 0}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

√ **66.** На рис. 7 изображена прямоугольная сетка $m \times n$.

а) Сколькими способами можно попасть из точки O в точку Q, если можно двигаться лишь вправо и вверх по отрезкам сетки?

б) Сколько из этих путей проходят через точку R?

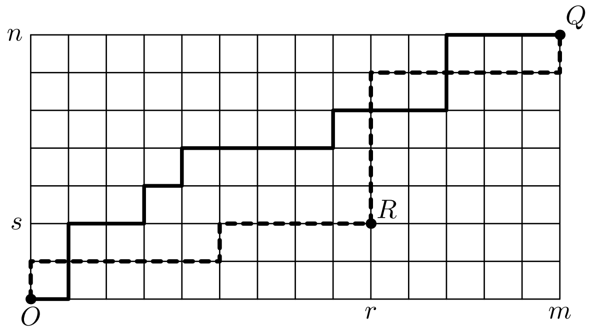

Рис. 7

67. Найти сумму слагаемых, не содержащих иррациональностей, в выражении

√ а) $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)^5$;

б) $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

68★. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d такие, что

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 + \left(c + d\sqrt{2}\right)^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

69★. Для каждого натурального n и целого $k \geqslant 0$ найти количество решений

а) в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1 + \ldots + x_n = k;$$

б) в натуральных числах того же уравнения;

в) в целых неотрицательных числах неравенства

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant k.$$

$\surd$ **70***. Доказать, что

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}.$$

Вывести отсюда формулы для сумм:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + m;$$
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + m \cdot (m+1);$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + m \cdot (m+1) \cdot (m+2);$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3.$$

71★. Доказать, что для любых $n \geqslant k$ наибольший общий делитель чисел $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ равен 1.

$\surd$ **72.** Даны следующие требования к расстановке шахматных фигур:

1) белые и чёрные фигуры стоят симметрично на первом и восьмом рядах соответственно, белые пешки занимают второй ряд, чёрные — седьмой;

2) слоны белых разноцветные (стоят на полях разного цвета);

3) белый король стоит между двумя белыми ладьями.

Найти число всевозможных начальных шахматных позиций, удовлетворяющих

а)° условию 1);

б) условиям 1), 2);

в)* условиям 1), 2), 3).

Вариант игры, в котором выполнены все три условия, придумал одиннадцатый чемпион мира по шахматам Роберт Джеймс Фишер, и с тех пор такие шахматы называются „случайные шахматы Фишера”. Выбранная наугад (обычно компьютером) расстановка фигур не позволяет игрокам пользоваться дебютной теорией и заставляет играть самостоятельно уже с первого хода.

73★. Доступ к сейфу имеют 9 членов комиссии. Каким наименьшим числом замков надо снабдить сейф для того, чтобы при определённом наборе ключей любые шесть членов комиссии, собравшись вместе, могли его открыть, а любых пяти было недостаточно? Указать также, как распределить ключи между членами комиссии.

74★. Обозначим через C_n число способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (точки считаются одинаковыми).

а) Доказать, что

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0.$$

б) Доказать, что

$$C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Числа C_n называются *числами Каталана.*

§ 6. Формула включений и исключений

Прежде чем выводить эту формулу в общем виде, рассмотрим несколько простых примеров.

Пример. Каждый из 25 учеников изучает по крайней мере один из двух иностранных языков: английский или французский, причём английский изучают 15 учеников, а французский — 12. Сколько учеников изучают оба языка?

Решение. Если сложить количества учеников, изучающих английский и изучающих французский, то будут *дважды* посчитаны ученики, изучающие оба языка. Если их вычесть из этой суммы, то как раз получится число учеников в классе. Значит, учеников, изучающих оба языка, $15 + 12 - 25 = 2$.

Ответ: 2.

Принцип, применённый нами в этой задаче, легко распространить на общий случай. Количество элементов в объединении двух конечных множеств равно сумме количеств элементов этих множеств минус количество элементов в их пересечении (см. рис. 8).

Далее число элементов конечного множества A мы будем называть *мощностью* этого множества и обозначать $|A|$. В этих обозначениях сформулированный принцип можно записать так:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Это — *формула включений и исключений* для двух множеств.

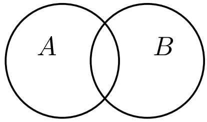

Рис. 8

Рассмотрим теперь случай трёх множеств A, B, C (см. рис. 9). Для подсчёта мощности объединения $|A \cup B \cup C|$ сперва сложим мощности всех трёх множеств: $|A|+|B|+|C|$. В этой сумме элементы, принадлежащие ровно двум множествам, посчитаны два раза, поэтому вычтем из неё мощности попарных пересечений. Получим $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A \cap C| - |B \cap C|$. Теперь видно, что мы „перестарались" с мощностью тройного пересечения $A \cap B \cap C$, которая в итоге оказалась включена и исключена одинаковое число раз, т. е. не посчитана. Осталось её прибавить и получить формулу

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

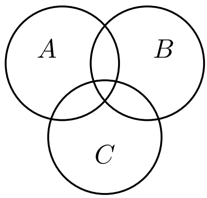

Рис. 9

Пример. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых никакие два из трёх данных элементов a, b, c не стоят рядом (в каком-либо порядке)?

Решение. 1. Найдём число перестановок, в которых фиксированные два элемента a и b стоят рядом. Объединим a и b в один элемент — сначала в ab, а потом в ba — и будем переставлять его с остальными элементами. В каждом из двух случаев получим $(n-1)!$ перестановок, т. е. всего $2(n-1)!$ перестановок.

2. Точно так же перестановок, в которых элементы a и c (b и c) стоят рядом, всего $2(n-1)!$.

3. Посчитаем число перестановок, в которых все три элемента a, b и c стоят рядом. Всего $3! = 6$ способов объединить эти три элемента в один, и в каждом случае существует $(n-2)!$ перестановки этого объединённого элемента с остальными. Поэтому всего получаем $6(n-2)!$ перестановок.

4. По формуле включений и исключений получаем

Ответ: $n! - 6(n-1)! + 6(n-2)!$.

Бывает, что искомая величина определяется неоднозначно, и для неё возможен целый диапазон значений.

Пример. Ваня, Петя и Оля решили 10 задач. Петя из этих задач решил 7, Оля — 8, а Ваня — 9. Сколько задач решили все трое?

Решение. 1. Петя не решил 3 задачи, Оля — 2, Ваня — 1. Т.к. $3 + 2 + 1 < 10$, то возможна ситуация, когда каждую не решённую кем-то задачу решили двое других (т.е. множества нерешённых задач попарно не пересекаются). В этой ситуации и достигается минимально возможное число задач, решённых всеми, равное $10 - (3 + 2 + 1) = 4$.

2. Максимально возможное (и тем более, все промежуточные) число 7 реализуется так: Оля с Ваней решают все 7 Петиных задач, а остальные 3 как-то распределяют между собой.

Ответ: от 4 до 7.

Для n множеств формулу включений и исключений можно получить индукцией[1]. Но есть и другой метод доказательства, а точнее, вывода этой формулы. Его мы сейчас и применим, а заодно продемонстрируем читателю весьма полезную технику.

Итак, пусть даны конечные множества $A_1, \ldots, A_n$ и требуется выразить мощность их объединения $B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ через мощности их всевозможных пересечений[2].

Для каждого множества A определим его *характеристическую функцию* χ_A формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0 & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Легко понять, что[3]

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \qquad \chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A, \tag{6}$$

[1] Для этого, правда, её сперва надо угадать!

[2] И в частности, через мощности самих множеств.

[3] Запись $f = g$, где f и g — функции, определённые на множестве X, означает, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

где через $\bar{A}$ обозначено *дополнение* множества A, т. е. множество всех элементов, не принадлежащих A (все множества можно считать подмножествами множества B).

Теперь выразим объединение множеств через пересечение и дополнение по *закону де Моргана*:

$$\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \tag{7}$$

(элемент не лежит в объединении множеств тогда и только тогда, когда он не лежит ни в одном из них или, что то же, лежит в дополнении каждого из них, т. е. в пересечении этих дополнений).

Взяв характеристические функции от обеих частей равенства (7) и применив формулы (6), получим

$$1 - \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = (1 - \chi_{A_1}) \ldots (1 - \chi_{A_n}).$$

Далее, раскрывая в правой части скобки и вновь применяя формулы (6) (уже только для пересечения множеств), получим

$$\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = (\chi_{A_1} + \ldots + \chi_{A_n}) - (\underbrace{\chi_{A_1 \cap A_2} + \ldots + \chi_{A_{n-1} \cap A_n}}_{\text{все } C_n^2 \text{ пересечений}}) +$$

$$+ (\underbrace{\chi_{A_1 \cap A_2 \cap A_3} + \ldots + \chi_{A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n}}_{\text{все } C_n^3 \text{ пересечений}}) - \ldots + (-1)^{n-1} \chi_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}. \tag{8}$$

Осталось перейти от характеристических функций к мощностям. Для этого воспользуемся равенством

$$|A| = \sum_{x \in B} \chi_A(x)$$

(складываются единицы и нули, причём единиц ровно столько, сколько элементов в множестве A), при помощи которого просуммируем по всем $x \in B$ равенства, получаемые подстановкой x в формулу (8). Получим формулу включений и исключений

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = (|A_1| + \ldots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) +$$
$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Формула включений и исключений справедлива не только для мощностей конечных множеств, но и для длин отрезков, мер углов, площадей и объёмов фигур и т. п.

Пример. На стороне AD треугольника AMD взяты такие точки B и C, что $\angle AMC = \angle BMD = 90^\circ$ и $\angle BMC = \varphi$. Найти площадь треугольника BMC, если площади треугольников AMC и BMD равны p и q.

Решение. См. рис. 10.

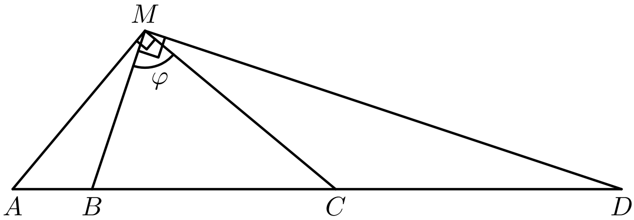

Рис. 10

Обозначим $S_{BMC} = x$ и $S_{AMD} = y$. По формуле включений и исключений для площадей треугольников $y = p + q - x$, откуда

$$x + y = p + q. \qquad (*)$$

По той же формуле для углов $\angle AMD = \angle AMC + \angle BMD - \angle BMC = 180^\circ - \varphi$. По формулам площади треугольника $x = \frac{1}{2} BM \cdot MC \cdot \sin\varphi$, $y = \frac{1}{2} AM \cdot MD \cdot \sin(180^\circ - \varphi)$, $p = \frac{1}{2} AM \cdot MC$, $q = \frac{1}{2} BM \cdot MD$, откуда

$$xy = \frac{1}{4} AM \cdot MC \cdot BM \cdot MD \cdot \sin\varphi \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = pq \sin^2\varphi. \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ по теореме, обратной теореме Виета, x и y — корни квадратного трёхчлена $t^2 - (p+q)t + pq\sin^2\varphi$. Отсюда, учитывая, что $x < y$, находим

$$x = \frac{p + q - \sqrt{(p+q)^2 - 4pq\sin^2\varphi}}{2}.$$

Ответ: $\frac{p+q-\sqrt{(p+q)^2-4pq\sin^2\varphi}}{2}$.

Задачи

75°. В классе 35 человек. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом и 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько учеников ходят в оба кружка?

76°. В поход пошли 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, и с сыром, и с колбасой — 28 человек, и с колбасой, и с ветчиной — 31 человек, и с сыром, и с ветчиной — 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов взяли пироги. Сколько их было?

√ **77°.** Каждый из работающих в отделе человек знает хотя бы один иностранный язык: 6 знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский.

а) Сколько человек работает в отделе?

б) Сколько из них знает только английский?

в) Только французский?

78. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю, 75 — зелёную. Сколько кубиков имеют грани всех трёх цветов?

√ **79.** Сколько чисел, не превосходящих 1000,

а) делятся на 3, но не делятся на 5?

б) не делятся ни на 3, ни на 5?

в) не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

80★. Обозначим через $\varphi(n)$ количество, не больших n и взаимно простых с ним. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные. Доказать, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Функция φ называется *функцией Эйлера* и играет важную роль в теории чисел.

√ **81.** На первом курсе 80% студентов сдали экзамен по математике, 85% — по физике, 90% — по химии, 98% — по истории. Какая часть всех первокурсников сдала все экзамены?

82. Доказать, что для любых натуральных a и b имеет место равенство[1]

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab.$$

[1] В котором использованы стандартные обозначения для наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух натуральных чисел.

√ **83°.** На полу в комнате площадью 6 м^2 постелены три ковра площадью 3 м^2 каждый. Доказать, что какие-то два из этих ковров налегают друг на друга по площади, не меньшей 1 м^2.

√ **84.** Андрей написал n писем n различным людям и заготовил n конвертов с их адресами. Сколькими способами могжно вложить письма в конверты, чтобы ни одно письмо не дошло до адресата?

85★. Внутри квадрата со стороной 2 расположено 7 многоугольников площади не менее 1 каждый. Доказать, что существуют два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1/7.

86★. Даны 1985 45-элементных множеств таких, что объединение любых двух из них состоит из 89 элементов. Сколько элементов в объединении всех этих множеств?

87★. Каждую вершину правильного n-угольника раскрашивают в один из m цветов, при этом раскраски, получающиеся друг из друга поворотом вокруг центра, считаются одинаковыми. Сколько n-угольников можно раскрасить по-разному, если

а) $n = p$;
б) $n = pq$;
в) $n = p^3$;
г) $n = p^2q$, где p, q — различные простые числа?

Математические обозначения

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A;
$\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b и c;
$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$A = B$ — множества A и B равны (состоят из одних и тех же элементов);
$\{\, x \mid P(x) \,\}$ — множество всех x, для которых верно утверждение $P(x)$;
$A \cup B = \{\, x \mid x \in A$ или $x \in B \,\}$ — объединение множеств A и B;
$A \cap B = \{\, x \mid x \in A$ и $x \in B \,\}$ — пересечение множеств A и B.

Список литературы

1. *Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А.* Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.

2. *Горбачёв Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.

Оглавление

Как пользоваться брошюрой 2
§ 1. Основные приёмы 3
§ 2. Принцип Дирихле 7
§ 3. Перестановки 10
§ 4. Размещения 14
§ 5. Сочетания 16
§ 6. Формула включений и исключений 24
Математические обозначения 30
Список литературы 30