

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ



Математический кружок (6–7 классы)

Составители: Н. П. Стрелкова, С. Л. Кузнецов

Москва, 2014

Математический кружок (6–7 классы). / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в общеобразовательных организациях // Сост. Н. П. Стрелкова, С. Л. Кузнецов. — М.: МГУ, 2014.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы.

Общие указания по проведению кружка

Методическая разработка состоит из девяти листочков с задачами и материалов для проведения одной игры «Математический аукцион».

Листочки из файла с раздаточным материалом предназначены для распечатывания и выдачи участникам кружка. Здесь же, в пособии для преподавателей, приведены ответы к задачам, указания, советы, идеи и примеры разного рода, которые могут оказаться полезными при использовании этой разработки. Конечно, мы не предлагаем буквально следовать всем этим советам!

Занятие по листочку проводится по следующей схеме.

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи, которые он собирается предложить детям.
- *В начале занятия*
 - каждому участнику выдаётся распечатанный листок с условиями задач
 - дети начинают думать над задачами, каждый — сам
 - **не нужно** в начале занятия объяснять детям какие бы то ни было методы или давать советы по решению предложенных задач
 - *можно* в начале занятия разобрать некоторые задачи прошлого занятия
- *Во время кружка*
 - школьники самостоятельно думают над задачами
 - руководитель кружка индивидуально слушает решения
 - если решение неверно, школьнику предлагается подумать ещё и исправить недочёты
 - если решение верно, школьник получает «плюсик» и поздравления (Молодец!)
 - **не нужно** ставить оценки

- *В конце занятия* можно (но не обязательно!) разобрать некоторые задачи у доски.

- **Мы категорически не советуем**

- делать занятия кружка обязательными для посещения
- проводить на кружке проверочные и контрольные работы
- стремиться подготовить детей к определённому виду соревнований / олимпиад
- стремиться объяснить детям решения абсолютно всех задач разработки
- читать указания и решения к задачам, не прорешав их самостоятельно

Плюсики за решённые задачи обычно записываются в специальную табличку. Без неё вполне можно и обойтись, но, во-первых, она даёт возможность руководителю кружка анализировать статистику решения задач, а во-вторых — детям приятно получить «плюсик».

Основная цель каждого занятия кружка в том, чтобы дети самостоятельно придумали решения нескольких нестандартных задач и испытали **радость**. Поэтому не стоит расстраиваться, если некоторые задачи вы не успеете разобрать или никто из детей не дойдёт до дополнительных задач.

Мы считаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2-3 задачи и ещё по 1-2 задачам у него будут какие-то полезные соображения, то это уже хороший результат.

Что делать, если задачи окажутся слишком сложными для ваших учеников. Мы ни в коем случае не советуем превращать занятие кружка в разбор всех задач у доски. Иногда можно давать подсказки (как индивидуально, так и у доски) — некоторые конкретные советы мы приводим ниже.

Если большинство предложенных задач слишком трудны, мы советуем подбирать к каждому занятию несколько задач попроще,

например, начинающим очень полезно решать задачи на разрезание клетчатых фигур, расшифровывать ребусы, расставлять числа в магических фигурах, решать простые логические задачки типа задачи про балалайку из третьего листочка, и т.д.

При выборе задач в первую очередь руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших детей** — задачи должны нравиться вам и должны пусть и не сразу, но без подсказок получаться у ваших детей. Вы можете воспользоваться нашим списком литературы и списком ссылок на интернет-ресурсы.

Желаем успеха!

Листок 1. Комментарии

1 Зайцы пилят бревно. Они сделали 10 распилов. Сколько получилось чурбачков?

Ответ. **Ответ: 11.**

○ Как вы будете реагировать на решение «раз распилов 10, то и чурбачков 10»?

– *Почему ты думаешь, что чурбачков столько же, сколько распилов?*

– *А если, например, распилил только один?*

○ Считать ли верным решением, если ребёнок просто говорит, что чурбачков будет на 1 больше, то есть 11? – **НЕТ**, пусть объяснит

– *Попробуй нарисовать бревно.*

2 Аня попала в Зазеркалье, где встретила свое отражение — Яну. Потом Яна попала в свое Зазеркалье, где встретила свое отражение — конечно же, Аню-2! Аня-2 попала в свое Зазеркалье, где была Яна-2. И так происходило достаточно долго, пока зеркало не разбилось. Назовите, как звали 1001-ю девочку.

Ответ. **Ответ: Аня-501**

○ Что делать, если ребёнок показывает неверный ответ?

– *Почему ты думаешь, что имя будет «Яна»?*

– *Как звали первую девочку? а третью? а пятую?*

– *Почему ты думаешь, что номер будет именно таким?*

– *Сколько среди первых 1000 девочек было «Ань»? а «Ян»?*

○ Что делать, если ребёнок показывает **ВЕРНЫЙ** ответ?

– *Почему ты думаешь, что ответ именно такой?*

3 На столе лежат в ряд пять монет: средняя — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. Разрешается одновременно перевернуть три рядом лежащие монеты. Можно ли при помощи нескольких таких переворачиваний положить монеты так, чтобы крайние слева и справа лежали орлом вверх, а остальные — решкой?

Ответ. **Ответ: можно.**

○ Что делать, если ребёнок говорит, что это сделать нельзя?

– *Почему ты думаешь, что это сделать невозможно?*

○ Что делать, если ребёнок начал объяснять, ПОЧЕМУ это сделать нельзя.

– *Слушать его (заведомо неверные) объяснения, пока вам хватит терпения и времени. Если он сам или с вашей помощью поймёт, что его объяснения недостаточны или неверны, это будет ценный опыт для него.*

4 Пять первоклассников стояли в шеренгу и держали 37 флажков. У всех первоклассников, стоящих справа от Тани, вместе — 14 флажков, справа от Яши — 32, справа от Веры — 20, справа от Максима — 8. Сколько флажков у Даши? А у Яши?

Ответ. Решение. Кто стоит правее всех? Это может быть только Даша (почему?). А кто сосед Даши? Тот, справа от кого меньше всего, то есть — Максим. Значит, у Даши — 8 флажков. Крайний слева — Яша, справа от него — 32, значит у него $37 - 32 = 5$ флажков.

○ Можно ли объяснять по-другому?

– *Можно. Но обязательно нужно доказать, что Даша и Яша стоят по краям. А дальше можно найти, в каком порядке стоят первоклассники и сколько флажков у каждого.*

5 Как из 1001 полоски бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 1001 составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1? *Нужно использовать все полоски.*

Ответ. Решение. Сделаем прямоугольник длиной 1001. Для этого в первой строке расположим полоску длины 1001, во второй — полоски длины 1 и 1000, в третьей — 2 и 999, и т.д.

○ А что произойдёт в конце? Не останутся ли у нас лишние полоски? И каких размеров получится прямоугольник?

– *Мы выкладываем пары с суммой 1001. Не считая числа 1001, у нас тысяча чисел, т.е. будет 500 пар, первая из которых — 1 и 1000, вторая — 2 и 999, а пятисотая — 500 и 501.*

6 В какой из нарисованных ниже фигурок больше клеточек?

Ответ. Во всех поровну. Вычислять число клеточек совсем не обязательно. Например, можно заметить, что в двух пирамидках одинаковое число «этажей» и на каждом «этаже» поровну клеток. А потом разрезать любую из пирамидок на две части, повернуть и получить квадрат.

○ Ребёнок посчитал пальцем (и обсчитался на 1 клеточку, или не обсчитался). Что делать?

– *Посчитай ещё раз, мне кажется, ты где-то ошибся. (это если сильно ошибся)*

– *Как же нам проверить твой счёт? А вдруг ты ошибся?*

– *А вот мне одного взгляда достаточно, чтобы понять, где больше. А ты сидишь и считаешь целых пять минут. Догадайся, как я это делаю?*

Дополнительные задачи

7 12-метровое бревно распилили на 3-метровые чурбаки за 12 минут. А за сколько времени 12-метровое бревно можно распилить на 1-метровые чурбаки?

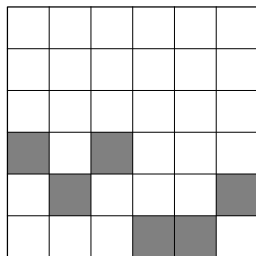
Ответ. Ответ: 44 минуты.

○ Как бороться с неверным решением и натолкнуть ребёнка на верный ход решения?

– *Сколько распилов сделали в первом случае?*

– *А сколько распилов надо сделать во втором случае?*

8 В квадрате 6×6 некоторые клетки закрашены свежей краской так, как показано на рисунке. Если перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно, то клетки, которые при перегибании совместятся с закра-



шенными, тоже закрасятся.

а) Можно ли закрасить весь квадрат, совершив не более четырёх таких перегибаний?

б) А хватит ли трёх перегибаний?

Ответ. **а) можно, б) хватит.**

○ Ребёнок говорит, что это сделать нельзя.

– Почему ты так думаешь? Объясни!

– Не можешь объяснить? Ты пытался, у тебя не получилось, и ты решил, что нельзя? Попробуй ещё! – А вы умеете? – Не скажу!

Листок 2. Комментарии

1 У деревянного куба отпилили один угол. Сколько углов осталось?

Ответ. «Осталось» 10 углов

○ Как отпилили угол?

– В этой задаче имеется в виду, что отпилили пилой НЕБОЛЬШОЙ кусок деревянного кубика, ровно. Уголок рядом с вершиной. Случаи, когда распил пересекает больше, чем через три ребра, рассматривать не требуется (хотя, если вы хотите, то можете обсудить с детьми и их).

○ Ребёнок говорит, например, что было 6 углов, а осталось 5.

– Можно посоветовать ему нарисовать, а для начала — представить куб (вспомни, как выглядит аквариум, кусок сахара, . . .)

– Годится и решение «вот рисунок, считаю пальцем: раз-два-три. . . -десять», и решение «было 8 углов, т.к. четыре на дне и четыре наверху (на крышке), когда мы отпиливаем, образуется три новых угла, а один отпиливается, значит, число углов увеличивается на 2»

2 После битвы со Змеем Горынычем три богатыря заявили:

Добрыня Никитич: „Змея убил Алёша Попович”.

Илья Муромец: „Змея убил Добрыня Никитич”.

Алёша Попович: „Змея убил я”.

Кто убил змея, если только один из богатырей сказал правду?

Ответ. **Добрыня Никитич.**

– Важно, чтобы ребёнок не только показал, что ответ «Добрыня Никитич» подходит, но и доказал, что только он-то и мог убить змея, что по-другому быть не могло.

○ А точно Добрыня? А например Алёша не мог убить? Проверь!

– Решение (прямым перебором). Если убил Добрыня, то прав только Илья — подходит. Если убил Илья, то никто не прав — не подходит. Если Алёша, то правы Добрыня и Алёша — не подходит.

3 Расстояние между столбами изгороди равно 5 м. Сколько столбов понадобится, чтобы огородить треугольный участок со сторонами 20 м, 20 м и 30 м?

Ответ. 14 столбов

– Нужно рисовать треугольник и расставлять столбы. При этом ребёнку легче всего, видимо, посчитать пальцем.

– «Умное решение» состоит в том, что форма замкнутого забора неважна — раз его периметр равен 70 м, то столбов понадобится $70 : 5 = 14$. Но эта формула сама по себе ещё не является решением задачи! Нужно объяснить, почему она даёт верный ответ. А для объяснения — проще всего нарисовать картинку.

4 Сегодня суббота. Какой день недели будет через 77 дней? а через 2014 дней? А какой день недели был 2014 дней назад?

Ответ. Через 77 дней будет снова суббота, через 2014 четверг, а 2014 назад понедельник.

– Через 7 дней будет явно суббота, и через 14, и через 21, и через 77. Потому что пройдёт целое число недель (11). Через 300 недель будет тоже суббота — это через 2100 дней, а нам нужно число поменьше — через 2009 дней тоже будет суббота (это можно проверить, поделив в столбик), а значит через 2010 — воскресенье, через 2011 — пн, через 2012 — вт, через 2013 — ср, через 2014 — четверг!

– В вопросе про прошлое можно снова использовать 2009, либо 2016. – Вообще, 2016 удобнее — оно ближе к 2014, отсчитывать быстрее. Но при делении в столбик мы получаем 2009, и чтобы перейти к 2016 — надо сообразить.

– Можно обратить внимание детей, что на прошлом занятии у нас чередовались Ани и Яны, каждые два номера было одно и то же имя. А теперь у нас каждые 7 дней один и тот же день недели. **НО МОЖНО** и не обсуждать это ни в какой момент, у нас ещё много чередования впереди, рано или поздно дети сами заметят аналогию между задачами.

5 Разделите между тремя людьми семь бочонков, полных мёда, семь бочонков, наполненных мёдом наполовину, и семь пустых бо-

чонков так, чтобы каждый получил поровну и мёда, и бочонков.

Ответ. Первому и второму: по два полных бочонка, два пустых и три половинки. А третьему оставшееся: три полных, три пустых и одна половинка.

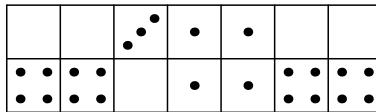
–Переливать мёд нельзя!

6 В коробке лежат костяшки домино (см. рисунок). Как расположены кости?

–Предполагается, что одинаковых костяшек в коробке нет! Это доминошки только из одного набора.

–Требуется не только нарисовать границы между доминошками, но и доказать, что они не могут проходить по-другому.

–Удобно начать с левого края, если бы две левые клетки были накрыты одной доминошкой 0-4, то вторая слева клетка в нижнем ряду тоже обязательно была бы покрыта доминошкой 0-4, т.е. было бы две одинаковых доминошки, что невозможно. Значит, слева лежат две горизонтальные доминошки 0-0 и 4-4. ТОГДА на правом конце стоит вертикальная доминошка 0-4, а левее неё — две горизонтальных. Теперь осталось чуть-чуть!



Дополнительные задачи

7 Король дал двум своим мудрецам задание: „Завтра на каждого из вас наденут либо белый, либо чёрный колпак, и каждому вручат две таблички — белую и чёрную. Вы увидите только цвет колпака товарища, но не сможете обмениваться никакой информацией. По команде вы одновременно поднимете одну из табличек. Испытание

будет пройдено, если хотя бы у одного из вас цвет колпака совпадёт с цветом поднятой им таблички“. У мудрецов есть ровно сутки, чтобы придумать, как справиться с головоломкой короля. Могут ли они гарантированно пройти испытание?

Ответ. Могут. Нужно, например, договориться, что посмотрев на колпак товарища, первый мудрец покажет табличку того цвета, который он увидит, а второй мудрец — противоположного цвета, чем увидит он.

– Мудрецы должны договориться, как им действовать, причём таким образом, чтобы они в результате ТОЧНО прошли испытание.

– Нужно объяснить, как должны действовать мудрецы, и доказать, что при таком способе они ТОЧНО выигрывают.

8 В комнате странной многоугольной формы стоит свеча, причём ни одна из стен не освещена полностью. Нарисуйте пример такой комнаты.

– Это сложная задача. Естественно, дети начинают говорить, что «это невозможно». Но — пусть попытаются!

○ Что значит «освещена»?

– Точка освещена, если на прямой дороге (отрезке) от свечи до этой точки нет преград (стен).

○ Разрешены ли частично освещённые стены?

– Давайте ещё раз прочитаем условие. «... ни одна из стен не освещена полностью». Значит, запрещаются полностью освещённые стены (у которых все точки освещены). А про не полностью освещённые ничего не говорится, значит, они разрешены!

Листок 3. Комментарии

1 Два мальчика играют на гитарах, а один — на балалайке. Миша с Петей играют на разных инструментах, Петя с Юрой — тоже. На чём играет Миша?

Ответ. На гитаре. Всего есть три разных пары мальчиков, и какая-то пара мальчиков играет на одинаковых инструментах, — это может быть только оставшаяся пара — Миша и Юра.

— *Есть ещё много других решений.*

— *Задача простая, поэтому стоит потребовать самостоятельных, чётких и внятных рассуждений!*

2 Запах от цветущего кустика ландышей распространяется в радиусе 20 м вокруг него. Сколько цветущих кустиков ландышей необходимо посадить вдоль прямолинейной километровой аллеи, чтобы по всей её длине пахло ландышем?

Ответ. **25 кустиков**

○ Ребёнок говорит, что мы должны ставить кустики на расстоянии 20 м друг от друга

— *Давай нарисуем, два кустика, пусть расстояние между ними 30 м, ты говоришь, что какая-то точка между ними останется без запаха. Покажи, какая?*

— *А почему ты считаешь, что мы должны обязательно посадить кустик в самом начале и в самом конце аллеи?*

○ Ребёнок понял, как нужно расставлять кустики, но не может посчитать их количество

— *Посоветуйте посчитать сначала для аллеи покороче, например, для аллеи в 200 м*

3 На дворе осень. Какое время года будет

а) через 240 месяцев?

б) через 999 месяцев?

в) через 1000 месяцев?

Ответ. а) осень, б) через 996 будет осень, а через 999 — зима, в) а через 1000 — либо продолжится зима, либо на-

ступит весна

–Задача продолжает тему про дни недели

–Нужно требовать объяснения, почему через 1000 месяцев может быть как зима так и весна, а вот лето и осень никак не могут быть

4 Расставьте числа 1, 2, 3, ..., 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 17.

–В этой задаче ничего не нужно объяснять, в том числе не нужно объяснять, как ты догадался до ответа — догадался и всё тут, молодец!

–Есть следующие соображения, которые можно (но совсем не обязательно!) обсудить на кружке (например, у доски в конце занятия). Итак, чему равна сумма всех чисел от 1 до 9? Правильно, 45. А нам сказано, что на каждой стороне должна быть сумма 17, то есть всего на трёх сторонах — 51. Но 51 больше 45, как это получилось? Ага, дело в том, что числа в угловых кружочках мы считаем дважды. То есть 51 — это сумма чисел на сторонах по одному разу и удвоенная сумма чисел в трёх углах. Какой вывод отсюда можно сделать? Что сумма чисел в углах равна шести! А значит, мы должны написать в углах какие числа? 1, 2 и 3! У всех ли в углах написаны эти числа? ...

5 Маша и Паша хотели купить по букварю, но Маше не хватало для покупки семи копеек, а Паше — одной копейки. Тогда они решили сложить свои деньги и купить один букварь на двоих, но денег всё равно не хватило. Сколько стоил букварь?

Ответ. 7 копеек

–Паше не хватало всего одной копейки — как же Маше удалось не помочь ему?

–Ага, если бы у Маши хоть одна копейка была, она бы выручила Пашу. Значит, у Маши нет ни одной копейки.

6 У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились 4 осьминога. Синий сказал: „Вместе у нас 28 ног“, зелёный: „Вместе у нас 27 ног“, жёлтый: „Вместе у нас 26 ног“, красный: „Вместе у нас 25 ног“. У кого сколько ног?

Ответ. У зелёного 6 ног, у остальных по семь

– Есть много разных способов перебирать случаи в этой задаче, главное, решение должно содержать доказательство, что такое количество ног подходит и что любое другое количество ног не подойдёт

– Раз они все сказали разное, правду сказал максимум один из них.

– При этом вообще говоря может быть, что все соврали!

– Можно аккуратно рассмотреть случаи: 1) соврали все, тогда у них всех по 7 ног, т.е. всего 28 ног, чем это плохо? Тем, что тогда синий осьминог не врёт! 2) соврали трое, тогда у них 21 нога в сумме, а у оставшегося 6 или 8, то есть всего либо 27, либо 29, ответа «29» у нас нет, значит, прав зелёный осьминог.

Дополнительные задачи

7 В тёмной комнате на столе лежат 12 монет. Известно, что 6 из них лежат вверх орлом, остальные решкой. Вы можете переворачивать монеты, однако не можете на ощупь отличить орёл от решки. Как разделить монеты на две одинаковые группы так, чтобы в них было равное число монет, лежащих вверх орлом?

– Это довольно сложная задача.

– Разделите монеты как-нибудь на две группы по 6 монет. Может там поровну «орлов», может, нет — этого мы не знаем... и узнать в темноте никак не можем... что же делать? что мы можем сделать?! Только — перевернуть монеты... Давайте пе-

ревернём ВСЕ монеты в одной из двух групп! И хорошенько подумаем.

– Если разбирать эту задачу, можно провести эксперимент с настоящими монетами.

8 Как на стол поставить **а)** как можно меньше, **б)** ровно 8 одинаковых кубиков так, чтобы полностью были видны ровно 23 грани кубиков, а остальные грани видны не были? Смотреть можно со всех сторон! Грань *не видна* только в случае, если она соприкасается с другой гранью или со столом.

Ответ. **а) наименьшее число кубиков равно пяти**

– Обязательно нужно требовать доказательство в пункте а), что меньшим числом кубиков не обойтись.

– Подходит, например, такое рассуждение. У каждого кубика всего 6 граней, на одной он стоит, значит, видно максимум 5. Если кубиков четыре или меньше, то граней видно 20 или меньше, а нам нужно 23 — не хватает.

Листок 4. Комментарии

1 а) На столе лежат три яблока весом 200 г, 300 г и 400 г. Малыш, а затем Карлсон берут по яблоку и одновременно начинают их есть (с одинаковой скоростью). Тот, кто доел своё яблоко, берёт следующее; каждый хочет съесть как можно больше. Какое яблоко выбрать Малышу вначале?

б) А если есть ещё яблоко весом 450 г?

Ответ. а) **200 г, б) 300 г**

○ Ребёнок говорит: понятно, что это самое выгодное

– *Нужно добиться объяснения, почему*

– *Почему так выгоднее всего? а если взять другое яблоко? – Тогда Карлсон может вот так поступить:! – Ага, верно, а если вот такое? – Тогда Карлсон светит. – Да, действительно, молодец, плюсики.*

2 В городе живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Рыцари носят с собой шпагу, а лжецы — нет. Собрались вместе два рыцаря и два лжеца и посмотрели друг на друга. Кто из них мог сказать фразу: а) «Я рыцарь»; б) «Среди нас все рыцари»; в) «Среди вас есть ровно один рыцарь»; г) «Среди вас есть ровно два рыцаря»?

Ответ. а) кто угодно, б) только лжец, в) кто угодно, г) **никто.**

○ в пункте (в) обратите внимание на слова «среди ВАС»

– *(а) Ты говоришь, что тебе кажется, что это сказал рыцарь? Почему? Потому что это будет тогда правдой? Ага, да. А лжец мог такое сказать? Почему?*

– *И так далее.*

3 Малыш спрятал от Карлсона банку с вареньем в одну из трёх разноцветных коробок. На коробках Малыш сделал надписи: на красной — «Здесь варенья нет»; на синей — «Варенье — здесь»; на зелёной — «Варенье — в синей коробке». Известно, что только одна из этих надписей правдива. В какой коробке Малыш спрятал варенье?

Ответ. В зелёной коробке.

○ Ребёнок говорит, что варенье в синей коробке, что он в этом уверен, или ему так кажется, или ещё почему-то.

– *Давай прочтём условие, что тут сказано? Ровно одна надпись должна быть правдива. Какие надписи правдивы, если варенье действительно лежит в синей коробке? . . . Сколько получается правдивых надписей? А сколько нужно?*

– *Решение состоит в переборе трёх вариантов нахождения варенья.*

4 На бесконечной тропинке через каждый дюйм нарисована метка. На одной из отметок сидит хромой кузнечик, который умеет прыгать влево на 7 дюймов, а вправо — на 4 дюйма. **а)** Как кузнечику перепрыгнуть на одно деление правее? **б)** Как кузнечику перепрыгнуть на одно деление левее? **в)** Докажите, что кузнечик сможет допрыгать до любой отметки.

– *В пунктах а) и б) годится любой правильный способ.*

5 В ряд высадили 12 деревьев. Затем между каждыми двумя посаженными деревьями посадили еще по одному дереву. Затем эту операцию проделали еще три раза. Сколько всего деревьев посажено?

Ответ. $177 = 12 + 11 + 22 + (12 + 11 + 22 - 1) + 88 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 12 - 1) - 1) - 1) - 1$.

6 а) Нарисуйте фигуру из чётного числа клеточек, которую нельзя разрезать на «доминошки» (прямоугольники из двух клеток).

б) Оказывается, можно придумать такую фигуру, которую нельзя разрезать на доминошки, но если к ней пририсовать одну доминошку — получившуюся фигуру уже можно будет разрезать на доминошки. Нарисуйте пример такой фигуры (она не должна распадаться на части), пририсуйте к ней доминошку (заштрихуйте её) и покажите, как разрезать полученную фигуру на доминошки.

в) Какое наименьшее число клеток может быть в фигуре из пункта **б)**?

Ответ. в) 8 клеточек.

– *Доказать, что меньше 8 клеточек нельзя — трудно. Можно не*

останавливаться на этом подробно, а просто поздравить тех участников кружка, кому удастся сделать меньше всех!

Дополнительные задачи

7 Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 магический квадрат, то есть разместите их в таблице 3×3 так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и двум диагоналям были одинаковы.

–Комментарии к этой задаче аналогичны комментариям к задаче 4 из третьего листка.

8 Одноклассники Аня, Боря и Вася живут на одной лестничной клетке. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успеваеет догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал. Однажды первой вышла Аня, вторым Боря, третьим Вася, и какие-то двое из них пришли в школу вместе. На следующий день первым вышел Вася, вторым Боря, третьей Аня. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

Ответ. Могут.

Листок 5. Комментарии

1 На деревянной линейке отмечены только три деления: 0, 7 и 11 см. Отложите с её помощью отрезок

а) какой-нибудь длины, отличной от семи и одиннадцати сантиметров; **б)** 8 см; **в)** 5 см.

– Это в точности задача про кузнечика из прошлого листочка. Но об этом не нужно говорить сразу, а можно и вообще об этом не говорить. Может быть, кто-то из детей сам заметит!

2 Малышу подарили игрушечного робота. Малыш включил его и долго наблюдал. Вот что он заметил: 1) Если сейчас робот кивает, то через минуту он моргает. 2) Если сейчас робот топает, то через минуту он хлопает. 3) Если сейчас робот пищит, то через минуту он кивает. 4) Если сейчас робот трещит, то через минуту он пищит. 5) Если сейчас робот моргает, то через минуту он топает. 6) Если сейчас робот хлопает, то через минуту он трещит. Сейчас робот пищит. Что он будет делать через 10 минут? а через час?

Ответ. Через 10 минут будет хлопать, а через час — пищать.

– Из наблюдений вытекает такая последовательность: Хло–Тре–Пищ–Кив–Мор–Топ–Хло. Значит, раз сейчас робот Пищит, то через 6 минут он будет снова пищать, и через 12 тоже, и через 60 — тоже.

3 По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: «Ты — мальчик» или «Ты — девочка», причём первую из этих фраз сказали ровно 7 детей. Сколько девочек среди собравшихся детей?

Ответ. 5 девочек.

– Может ли кому-то мальчик сказать фразу «Ты — девочка»? Кому? Проверяем... не может!

4 Карлсон загадал число от 1 до 8, а Малыш пытается его угадать. Он задаёт Карлсону вопросы, на которые тот отвечает только «ДА»

или «НЕТ». Как Малышу отгадать число за три вопроса?

Ответ. Есть разные способы.

–*Главное, чтобы алгоритм гарантировал угадывание задуманного числа за три вопроса.*

5 Шёл суд по делу об украденной муке. Обвиняемых было трое: Болванщик, Мартовский Заяц и Соня. Мартовский Заяц заявил, что вор — Болванщик; Болванщик и Соня тоже дали свои показания, которые, однако, не были записаны. Суд также установил, что только один из обвиняемых украл муку, и лишь этот обвиняемый сказал правду. Кто украл муку?

Ответ. Соня

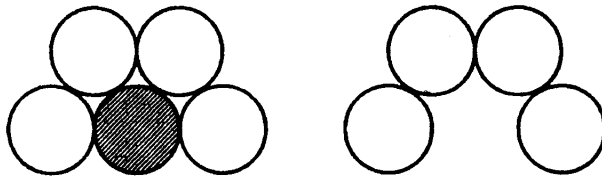
–*Комментарии аналогичны комментариям к задачам про богатырей (№2 из второго листка), про варенье в разноцветных коробках (№3 из четвёртого листка), см. также задачу про осьминогов (№6 из третьего листка)*

–*Если вы раньше не разбирали богатырей, варенье или осьминогов, может быть уместно обсудить решение одной или нескольких из этих задач в начале сегодняшнего занятия.*

6 Легко расположить на столе пять одинаковых монет, как показано на рисунке слева. Заберём одну монету (заштрихованную), а остальные смешаем. Не используя ничего, кроме этих четырёх монет, расположите их так, как показано на рисунке справа.

–*Нужно расположить монеты в точности так, а не «примерно так»*

–*Единственная существенная разрешённая операция — прикладывание монет друг к другу «вплотную»*



Дополнительные задачи

7 Какое наибольшее число брусков размером $1 \times 2 \times 2$ можно разместить (без пересечений) в кубе $3 \times 3 \times 3$?

Ответ. Шесть.

– Легко доказать, что больше шести нельзя (семь брусков заняли бы 28 кубиков, а у нас их только 27)

– Но отсюда ещё не следует, что ответ 6. А вдруг и шесть тоже нельзя?

– Пример расположения шести брусков построить непросто.

8 Зайцы распилили несколько бревен. Они сделали 10 распилов и получили 16 чурбачков. Можно ли точно сказать, сколько брёвен они распилили?

Ответ. Можно: шесть.

○ Ребёнок говорит, что он пять брёвен режет пополам, а шестое бревно режет пятью распилами на 5 частей, и получает как раз 10 распилов и 16 чурбачков.

– А может быть 7 брёвен тоже можно так распилить? Или пять брёвен. Почему именно шесть? Нужно доказать!

– Нужно вспомнить, что происходит с разницей между числом распилов и чурбачков при распиливании одного бревна.

Листок 6. Комментарии

1 а) Можно ли сложить бумажный квадрат так, чтобы затем одним взмахом ножниц разрезать его на 4 квадратика?

б) А на 9 квадратиков?

Ответ. Можно, и то, и другое.

— Нужно нарисовать квадрат, линии сгиба и линию разреза и показать, куда этот разрез накладывается и объяснить, почему он не разрежет ничего лишнего.

2 На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

Ответ. 21 кусок.

— Сколько красных колец? Четыре. Сколько жёлтых? Шесть, а зелёных — десять. Всего колец получается 20, а кусков, значит, будет 21.

— Рисунок разноцветными карандашами и подсчёт 21 куска пальцем — это здорово, но остаются вопросы.

— В случае с твоей колбасой получился 21 кусок, а у них там в задаче, может быть, была другая колбаса? И ответ другой?

— Почему ты нарисовал именно четыре красных кольца? Ага, значит, их обязательно должно быть четыре? Давай это запишем, так...

3 Ваня пошёл с папой в тир. Уговор был такой: Ване даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. Ваня сделал 14 выстрелов и ровно в половине из них он попал в цель. Сколько патронов осталось у Вани?

Ответ. 17 патронов.

4 На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Островитянин Ой сказал своим друзьям: «Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!» Сможете ли вы определить, кем является Ой — рыцарем или лжецом?

Ответ. Ой — лжец.

— Оставим пока Ой-я в покое — давайте задумаемся, кем является его сосед?

5 На линейке длиной 9 см нет делений. Нанесите на неё три промежуточных деления так, чтобы ею можно отмерить любое целое число сантиметров от 1 до 9 включительно.

Ответ. Например, подойдёт разбиение линейки на части $9 = 1 + 3 + 3 + 2$.

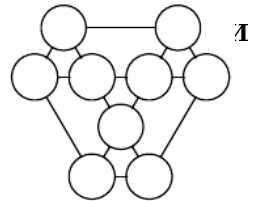
— Края линейки можно использовать.

— Отмерить — значит отмерить одним прикладыванием (т.е. нельзя нарисовать 1 см и его откладывать).

— О, ты нанёс деления, объясни, как теперь отмерить 1 см? а 2 см? Да, разумеется, мы должны проверить, что твоя линейка удовлетворяет всем условиям задачи, а то вдруг ты где-то ошибся?

Дополнительные

6 Впишите в кружки на рисунке числа от 1 до 9 так, чтобы суммы чисел, стоящих в вершинах каждого из семи равносторонних треугольников, были равны.



— Комментарии аналогичны задаче 4 из листочка 3.

7 На доске записано число 61. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на это место произведение его цифр, увеличенное на 13. Например, через минуту на доске запишут значение выражения $6 \cdot 1 + 13$, то есть 19. Какое число будет на доске через 10 минут? а через 100 минут?

Ответ. Через 10 минут будет число 17, через 100 минут — тоже 17.

— Не будем лениться и попытаемся что-то изобрести — выпишем числа, через 1 минуту — 19, через 2 — 22, через 3 — 17, через 4 — 20, через 5 — 13, через 6 — 16, через 7 — 19. Ой! 19 уже было, значит, будет повторяться?

- Как понять, через сколько шагов числа повторяются?
- Через 1 минуту и через семь — 19, т.е. ещё через 6 минут снова будет 19...

Листок 7. Комментарии

1 Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

Ответ. Сможет.

— Решение удобно записать в виде таблички из трёх столбцов, по одному на каждый (постепенно уменьшающийся) кусочек сыра.

2 — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.

— Нет, книг у него меньше тысячи, — возразила Аня.

— Одна-то книга у него наверняка есть, — сказала Таня.

Сколько книг может быть у Вовы, если истинно ровно одно из этих утверждений?

Ответ. Либо ноль, либо тысяча книг.

— В первом случае верно только третье утверждение, во втором — только второе. Если верно первое, то верно и третье, что невозможно по условию.

○ Школьник потерял ответ «ноль».

— После того, как вы с ребёнком убедились, что 1000 подходит, нужно требовать доказательство, что других ответов нет.

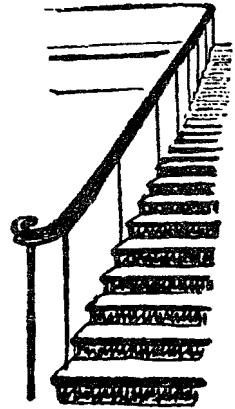
○ Зачем? Вот, я же нашёл, тысяча книг!

— Ну смотри, ребята что-то там говорили, да к тому же ввали, — может, данных задачи недостаточно, чтобы однозначно определить, сколько у Вовы книг?

○ Нет, достаточно, сейчас я вам покажу!...

— Если хочется сильно подсказать на этом этапе, можно спросить, а кто из детей вообще может быть прав? Вот у тебя была права Таня, а вдруг кто-то другой?

— Если хочется подсказать на нулевом этапе, можно спросить, как думает ребёнок, если у Вовы 1 книга, то какие утверждения



верны, а какие нет? почему?

3 Ваня с папой снова пошли в тир. Уговор был прежний: Ване даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. На этот раз Ваня стрелял, пока патроны не кончились, и сделал всего 34 выстрела. Сколько раз он попал в цель?

Ответ. 8 раз.

○ «Вот, посмотрите, Ваня сначала попал и заработал три патрона, потом дважды промахнулся, потом . . . , я всё расписал и у меня получилось 8 попаданий, а по-другому никак!»

— Как обычно, уточняем, почему же по-другому никак, и добиваемся доказательства, что попаданий было именно 8.

— Раз папа дал 10 патронов, а всего использовано 34, значит, 24 патрона Ваня заработал собственными попаданиями, по три патрона на попадание. . .

4 Очень хитрый киоскёр получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в каждой. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. Оказалось, что 70 конвертов он отсчитывает быстрее, чем 40. Как? А за сколько секунд он может отсчитать 360 конвертов?

Ответ. Он отсчитывает 30 конвертов из пачки и берёт остальные 70, не считая. 360 конвертов он отсчитает за 40 секунд, если считать, что ещё три пачки конвертов он возьмёт мгновенно.

5 Подсчитайте *точно*, сколько ступенек у лестницы на рисунке справа.

Ответ. 29 ступенек.

— Видно, что у между опорами перил 7 пролётов, первая опора стоит на первой ступеньке, вторая опора — на пятой ступеньке, а восьмая — на последней.

— Теперь нарисуй в тетради, как выглядит лестница!

— Семь пролётов по четыре ступеньки, да ещё последняя ступенька.

Дополнительные задачи

6 У куба шесть граней, и все они — квадраты. Придумайте другой многогранник, все грани которого — одинаковые квадраты.

Ответ. Посмотрите на рисунок к следующему занятию.

—Можно собрать из кубиков и более сложные подходящие конструкции.

7 Лёша выдал Паше и Ване по карточке. На каждой карточке написано натуральное число, причём Лёша утверждает, что эти числа отличаются на единицу, и просит ребят определить эти числа. Каждый из них посмотрел на свою карточку, но не показал её соседу. После чего они начали беседу.

Паша: „Я не знаю твоё число“.

Ваня: „Я тоже не знаю твоё число“.

Паша: „Я тоже не знаю твоё число“.

После ещё ста точно таких же реплик Ваня сказал, что знает число Паши. Какие числа были написаны на карточках?

Ответ. 104 и 105.

—Первым ходом Паша как бы говорит: «у меня не 1», а Ваня отвечает: «у меня не 2», и так далее.

Листок 8. Комментарии

1 У папуаса, не умеющего считать, есть мешок кокосовых орехов. Путешественник Миклухо-Маклай предлагает ему обменять этот мешок на коробок спичек, утверждая, что спичек в коробке больше, чем кокосов в мешке. Как папуасу проверить, не обманывает ли его Маклай?

Ответ. Можно сначала менять один кокос на одну спичку, но получается, что обмен ещё до окончания проверки. Можно выложить в ряд, по парам — спичка–кокос. Но это много места займёт. Удобно взять ещё один мешок и коробочку и перекладывать по очереди, одна спичка, один кокос.

2 Есть маленькие песочные часы на три минуты и большие — на десять. Можно ли при помощи этих часов сварить яйцо, если для этого его требуется варить: **а)** ровно 19 минут; **б)** ровно 7 минут; **в)** ровно 4 минуты; **г)** ровно 5 минут, **д)** ровно 28 минут. **е)** Докажите, что с помощью этих часов можно отмерить любое целое число минут. (В какой момент начать варить яйцо, мы выбираем сами.)

–*е) Сколько минут легко отмерить? 10, 20, 30 и вообще заканчивающиеся на ноль — очень легко!*

– *Если число оканчивается на 3, или 6, или 9 — как отмерить?*

– *А что делать, если оканчивается на 7? как мы отмеряли 7 минут? А теперь 37 легко отмерить?*

– *И теперь смело перебираем все возможные последние цифры.*

3 Железный Дровосек одним ударом топора разбивает любой чурбак или полено на три части. Он хочет разбить чурбак на 33 части. Сколько ударов ему понадобится?

Ответ. 16 ударов

○ «Каждым ударом на 3, всего 33, значит 11 ударов! Разве неправильно?»

– *Пусть ты хочешь Получить 9 чурбачков, тогда, по-твоему, нужно три удара? Нарисуй!*

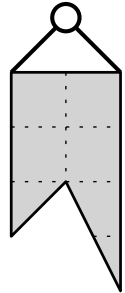
– *Каждый удар добавляет ДВА чурбачка.*

4] Однажды в четверг после дождя между двумя жителями острова Рыцарей и лжецов Тимом и Томом произошёл следующий диалог. «Ты можешь сказать, что я рыцарь», — гордо заявил Тим. «Ты можешь сказать, что я лжец», — грустно ответил ему Том. Кем являются Тим и Том?

Ответ. Тим лжец, а Том — рыцарь

— Если первое высказывание — правда, то Тим — рыцарь, значит, тот, кто может сказать «Тим — рыцарь», сам должен быть рыцарем, и говорить только правду, а значит второе высказывание тоже правда, но как же может рыцарь Тим сказать про рыцаря Тома, что он лжец?! Противоречие, значит, Тим — лжец, и его высказывание — ложь, то есть Том не может сказать про Тима, что он рыцарь! А лжец так вполне мог бы сказать про лжеца. Значит, Том — не лжец, а рыцарь. Осталось для очистки совести проверить, что Том говорит правду — лжец Тим запросто может сказать про рыцаря Тома, что он лжец.

5] В стене имеется маленькая дырочка (точка). У хозяина есть флажок, изображённый на рисунке справа. Покажите все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.



Ответ. Если вбить гвоздик в дырку, повесить флажок, а затем центрально-симметрично отразить флажок относительно дырки, то получится как раз искомое множество точек.

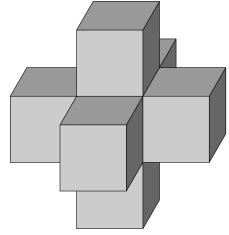
— Нарисуйте, куда нужно вешать флажок, чтобы его углы попали точно на дырку.

— Если флажок, подвешенный в точке B , закрывает дырку A , то центрально симметричная относительно середины AB фигура закрывает точку B (и наоборот). Эта симметричная фигура всегда одна и та же (почему?) — она и будет ответом.

— Эту задачу интересно обсуждать с сильными старшеклассниками при обсуждении движений плоскости, но на кружке для 5–7 класса достаточно, чтобы ребёнок нарисовал правильную картинку и показал, как получают границы найденной им области.

Дополнительные задачи

6 Семь игральных кубиков сложили в фигурку, как показано на рисунке. При этом кубики прикладывали друг к другу гранями с одинаковым числом точек. Сколько всего точек на видимых гранях этой конструкции?



Ответ. 105 точек.

– Сколько точек на поверхности одного кубика?
21.

– Сколько точек на семи кубиках? $21 \cdot 7$.

– Сколько из них не видны? Те, что на внутреннем кубике, и прилегающие к нему, т.е. ещё столько же, сколько на нём, — $21 \cdot 2$.

– Итак, остаётся $21 \cdot 7 - 21 \cdot 2 = 21 \cdot 5 = 105$ точек.

7 Какое наименьшее число уголков из трёх клеток можно так расположить на доске 8×8 , что ещё один уголок туда уже не влезет?

Ответ. 11 уголков.

– Попробуем оценить, сколько уголков нам точно потребуется. Мысленно разделим нашу доску на 16 квадратиков 2×2 . Понятно, что нам нужно, чтобы в каждом из этих 16 квадратиков хотя бы две клетки были закрыты уголками. Поэтому нам нужно накрыть хотя бы 32 клетки, а значит, 10 уголков не хватит.

– Чтобы показать, что 11 уголков хватит, нужно придумать и нарисовать пример. Это не очень просто.

Листок 9. Комментарии

1 Сколько существует двузначных чисел? А трёхзначных? А 100-значных?

Ответ. $99 - 9 = 90$; $999 - 99 = 900$; $90 \dots 0$
99

— На самом деле, не ошибиться здесь — сложно, и, скорее всего, стоит внимательно отнестись к обсуждению этой задачи.

2 По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части ровно по 20 минут каждая (длительность фильма в минутах нацело делилась на 20) и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части ровно по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

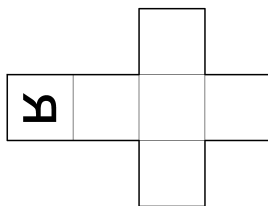
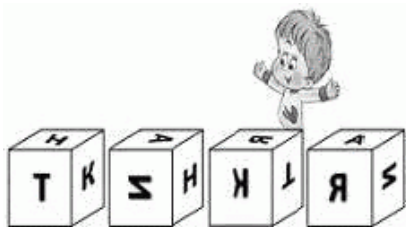
Ответ. **На первом канале закончится на 1 минуту раньше.**

— Нужно придумать рассуждение, не зависящее от продолжительности фильма.

— Можно представить себе длинную чёрную ленту, порезанную на кусочки по 10 см, с сантиметровыми белыми вставками. Можно поменять местами первый белый кусок со вторым чёрным, получится, что в начале 20 см чёрные, а потом 2 см белые. После этого следующей четвёрке «ЧБЧБ» проделать то же самое, и т.д. Постепенно лента второго канала переклеится в ленту первого канала, за тем исключением, что в самом конце будет тройка «ЧБЧ», вместо «ЧЧ» первого канала.

— Можно посчитать, используя наш опыт работы с чурбачками и кольцами на колбасе. Если на первом канале фильм длится 20х минут, то рекламных пауз будет $(x - 1)$, т.е. всего $2(x - 1)$ минут рекламы. На втором канале будет $2x - 1$ минутных рекламных пауз, а это на 1 минуту больше.

3 Ребёнок поставил четыре одинаковых кубика так, что буквы на сторонах кубиков, обращённых к нему, образуют его имя (см. рисунок). Нарисуйте, как расположены остальные буквы на данной развёртке кубика, и определите, как зовут ребёнка.



Ответ. **НИКА.**

4 Два мудреца написали на семи карточках числа от 1 до 7. После этого они перемешали карточки, первый мудрец взял себе три карточки, второй взял две, а оставшиеся они, не глядя, убрали в мешок. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие числа написаны на карточках первого мудреца?

Ответ. **Это могут быть только карточки 2, 4, 6.**

5 На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

Ответ. **Один.**

– Можно аккуратно перебрать варианты, начиная, например, с вопроса, говорит ли первый правду или ложь.

– Можно перебрать по числу рыцарей. Трое рыцарей — очевидно не подходит. Двое рыцарей подходит только в случае, если первый — лжец. Один рыцарь не подходит, поскольку если этот один рыцарь — второй, то он врёт, а если это не второй, то он, наоборот, говорит правду, хотя должен лгать. Ноль рыцарей не подходит, поскольку тогда первый говорит правду, а должен лгать.

Дополнительные задачи

6 Бабе-Яге подарили большие песочные часы на 5 минут и маленькие — на 2 минуты. Зелье должно непрерывно кипеть ровно 8 минут. Когда оно закипело, весь песок в больших часах находился в нижней половине, а в маленьких — какая-то (неизвестная) часть песка в верхней, а остальная часть — в нижней половине. Помогите Бабе-Яге отмерить ровно 8 минут. (Песок все время сыплется с постоянной скоростью. На переворачивание время не тратится.)

— Мы не знаем, сколько песка в верхней части!

— Мы не можем снять зелье с огня, не можем никак подготовить часы — нужно начинать измерение прямо сейчас!

— Задача похожа на задачу про 12 монет из третьего листочка, только здесь придётся сделать больше «переворачиваний».

7 На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Что написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

Ответ. 6.

— Чему равна сумма всех чисел на кубике? 21.

— Тогда в первый раз чему была равна сумма на нижней и верхней гранях? 9.

— А во второй раз чему была равна сумма на нижней и верхней гранях? 6.

— Как можно получить 9? $9 = 4 + 5$, $9 = 3 + 6$, ещё возможны какие-то варианты? Нет.

— Если $9 = 4 + 5$, то шесть как получить?...