## Листок 1. Сумма углов треугольника

**Теорема.** *Сумма внутренних углов треугольника равна* $180^\circ$.

$\boxed{1}$ Точки $M$ и $N$ лежат на стороне $AC$ треугольника $ABC$. Известно, что $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник $BMN$ — равнобедренный.

$\boxed{2}$ Треугольник $ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок $AM$ делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями $AB$ и $MC$. Найдите угол $B$.

$\boxed{3}$ Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

$\boxed{4}$ В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BK$. Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите $\angle A - \angle C$.

$\boxed{5}$ В прямоугольном треугольнике $ABC$ на гипотенузе $AB$ взяты точки $K$ и $M$, причём $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол $MCK$.

$\boxed{6}$ На плоскости отметили пять точек $A, B, C, D, E$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Их соединили отрезками: $AC$, $CE$, $EB$, $BD$, $DA$. В результате получилась пятиконечная звезда. Докажите, что

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ.$$

$\boxed{7}$ В треугольнике $ABC$ $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Биссектриса $AD$ равна 2. Найдите разность длин сторон $BC$ и $AB$.

$\boxed{8}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярдного стола, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могло ли это быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону «угол падения равен углу отражения»).



## Листок 1. Сумма углов треугольника

**Теорема.** *Сумма внутренних углов треугольника равна* $180^\circ$.

$\boxed{1}$ Точки $M$ и $N$ лежат на стороне $AC$ треугольника $ABC$. Известно, что $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник $BMN$ — равнобедренный.

$\boxed{2}$ Треугольник $ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок $AM$ делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями $AB$ и $MC$. Найдите угол $B$.

$\boxed{3}$ Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

$\boxed{4}$ В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BK$. Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите $\angle A - \angle C$.

$\boxed{5}$ В прямоугольном треугольнике $ABC$ на гипотенузе $AB$ взяты точки $K$ и $M$, причём $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол $MCK$.

$\boxed{6}$ На плоскости отметили пять точек $A, B, C, D, E$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Их соединили отрезками: $AC$, $CE$, $EB$, $BD$, $DA$. В результате получилась пятиконечная звезда. Докажите, что

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ.$$

$\boxed{7}$ В треугольнике $ABC$ $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Биссектриса $AD$ равна 2. Найдите разность длин сторон $BC$ и $AB$.

$\boxed{8}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярдного стола, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могло ли это быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону «угол падения равен углу отражения»).

4

## Листок 2. Неравенство треугольника

*Для любых трёх точек $A, B, C$ на плоскости выполнено неравенство*

$$AB + BC \geqslant AC,$$

*которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда точка $B$ лежит на отрезке $AC$.*

$\boxed{1}$ В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом.

$\boxed{2}$ Существуют ли треугольники с такими длинами сторон:
**а)** 1 м, 2 м, 3 м; **б)** 3 м, 4 м, 5 м; **в)** $3^{33}$ м, $3^{33}$ м, $3^{30}$ м; **г)** $2^{20}$ м, $2^{21}$ м, $2^{22}$ м?

$\boxed{3}$ Докажите, что: **а)** длина любой стороны треугольника больше разности длин двух других его сторон; **б)** в треугольнике длина любой стороны не превосходит полупериметра; **в)** в треугольнике сумма длин медиан больше полупериметра; **г)** у выпуклого четырёхугольника сумма длин диагоналей больше полупериметра и меньше периметра. **д)** Верны ли утверждения пункта г) для невыпуклого четырёхугольника?

$\boxed{4}$ Петя купил «Конструктор», в котором было **а)** 4 палочки; **б)** 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трёх палочек можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение, составляя из палочек треугольники. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какого наименьшего число проверок точно хватит Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение?

$\boxed{5}$ Расстояние от дома Васи до магазина 200 м, от магазина до футбольного поля 300 м, от футбольного поля до школы 500 м, а от дома до школы 1 км. А какое расстояние от дома Васи до футбольного поля?

$\boxed{6}$ Найдите внутри выпуклого четырёхугольника точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей. (Четырёхугольник называется выпуклым, если его диагонали пересекаются внутри него.)

$\boxed{7}$ Верно ли, что среди любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

$\boxed{8}$ Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого из них — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по 1 см, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, из которых можно будет составить треугольник.



## Листок 2. Неравенство треугольника

*Для любых трёх точек $A, B, C$ на плоскости выполнено неравенство*

$$AB + BC \geqslant AC,$$

*которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда точка $B$ лежит на отрезке $AC$.*

$\boxed{1}$ В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом.

$\boxed{2}$ Существуют ли треугольники с такими длинами сторон:
**а)** 1 м, 2 м, 3 м; **б)** 3 м, 4 м, 5 м; **в)** $3^{33}$ м, $3^{33}$ м, $3^{30}$ м; **г)** $2^{20}$ м, $2^{21}$ м, $2^{22}$ м?

$\boxed{3}$ Докажите, что: **а)** длина любой стороны треугольника больше разности длин двух других его сторон; **б)** в треугольнике длина любой стороны не превосходит полупериметра; **в)** в треугольнике сумма длин медиан больше полупериметра; **г)** у выпуклого четырёхугольника сумма длин диагоналей больше полупериметра и меньше периметра. **д)** Верны ли утверждения пункта г) для невыпуклого четырёхугольника?

$\boxed{4}$ Петя купил «Конструктор», в котором было **а)** 4 палочки; **б)** 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трёх палочек можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение, составляя из палочек треугольники. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какого наименьшего число проверок точно хватит Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение?

$\boxed{5}$ Расстояние от дома Васи до магазина 200 м, от магазина до футбольного поля 300 м, от футбольного поля до школы 500 м, а от дома до школы 1 км. А какое расстояние от дома Васи до футбольного поля?

$\boxed{6}$ Найдите внутри выпуклого четырёхугольника точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей. (Четырёхугольник называется выпуклым, если его диагонали пересекаются внутри него.)

$\boxed{7}$ Верно ли, что среди любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

$\boxed{8}$ Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого из них — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по 1 см, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, из которых можно будет составить треугольник.

5

## Листок 3. Построения цирулем и линейкой

Для построений можно пользоваться линейкой без делений и циркулем.

$\boxed{1}$ Постройте треугольник: **а)** по двум сторонам и углу между ними; **б)** по двум сторонам и углу, лежащему против одной из этих сторон. Сколько различных треугольников может получиться?

$\boxed{2}$ Постройте прямоугольный треугольник: **а)** по двум катетам;
**б)** по катету и гипотенузе; **в)** по катету и прилежащему острому углу;
**г)** по катету и противолежащему острому углу.

$\boxed{3}$ Постройте треугольник:
**а)** по двум сторонам и медиане, проведённой к первой стороне;
**б)** по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону;
**в)** по стороне и опущенным на неё высоте и медиане.

$\boxed{4}$ **а)** Даны две точки $A$ и $B$ и прямая $a$, не проходящая через эти точки. На прямой $a$ постройте точку, равноудалённую от точек $A$ и $B$. Всегда ли такая точка существует?
**б)** Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько различных точек может получиться?
*Подсказка: используйте свойство серединного перпендикуляра к отрезку.*

$\boxed{5}$ Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и сумме длин двух других сторон.

$\boxed{6}$ **а)** Постройте окружность, проходящую через три данные точки. Всегда ли такая окружность существует? **б)** Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности. (*Описанная окружность* — это окружность, проходящая через все вершины треугольника.)

$\boxed{7}$ **а)** Докажите, что гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной около него окружности. *Подсказка: достройте треугольник до прямоугольника либо воспользуйтесь задачей 20.6 а).*
Постройте прямоугольный треугольник: **б)** по гипотенузе и острому углу; **в)** по гипотенузе и высоте, опущенной на неё.

$\boxed{8}$ Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме двух катетов. Сколько различных треугольников может получиться?



## Листок 3. Построения цирулем и линейкой

Для построений можно пользоваться линейкой без делений и циркулем.

$\boxed{1}$ Постройте треугольник: **а)** по двум сторонам и углу между ними; **б)** по двум сторонам и углу, лежащему против одной из этих сторон. Сколько различных треугольников может получиться?

$\boxed{2}$ Постройте прямоугольный треугольник: **а)** по двум катетам;
**б)** по катету и гипотенузе; **в)** по катету и прилежащему острому углу;
**г)** по катету и противолежащему острому углу.

$\boxed{3}$ Постройте треугольник:
**а)** по двум сторонам и медиане, проведённой к первой стороне;
**б)** по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону;
**в)** по стороне и опущенным на неё высоте и медиане.

$\boxed{4}$ **а)** Даны две точки $A$ и $B$ и прямая $a$, не проходящая через эти точки. На прямой $a$ постройте точку, равноудалённую от точек $A$ и $B$. Всегда ли такая точка существует?
**б)** Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько различных точек может получиться?
*Подсказка: используйте свойство серединного перпендикуляра к отрезку.*

$\boxed{5}$ Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и сумме длин двух других сторон.

$\boxed{6}$ **а)** Постройте окружность, проходящую через три данные точки. Всегда ли такая окружность существует? **б)** Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности. (*Описанная окружность* — это окружность, проходящая через все вершины треугольника.)

$\boxed{7}$ **а)** Докажите, что гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной около него окружности. *Подсказка: достройте треугольник до прямоугольника либо воспользуйтесь задачей 20.6 а).*
Постройте прямоугольный треугольник: **б)** по гипотенузе и острому углу; **в)** по гипотенузе и высоте, опущенной на неё.

$\boxed{8}$ Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме двух катетов. Сколько различных треугольников может получиться?

6

## Листок 4. Средняя линия треугольника

**Определение.** *Средняя линия треугольника* — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

**Теорема** (свойства средней линии треугольника)**.** *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

$\boxed{1}$ В треугольнике провели три средние линии.
**а)** Докажите, что они разбивают его на четыре равных треугольника.
**б)** Найдите периметр каждого из них, если периметр исходного треугольника равен 28.

$\boxed{2}$ Длины двух сторон треугольника равны $a$ и $b$. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр образовавшегося при этом четырёхугольника.

$\boxed{3}$ Средняя линия, параллельная стороне $AC$ треугольника $ABC$, равна половине стороны $AB$. Докажите, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

$\boxed{4}$ С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если даны середины трёх его сторон.

$\boxed{5}$ Точки $M$ и $N$ расположены соответственно на сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$, причём $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. **а)** Докажите, что $MN||BC$. **б)** Найдите $MN$, если $BC = 12$.

$\boxed{6}$ **а)** Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. **б)** Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

$\boxed{7}$ Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.

$\boxed{8}$ **а)** Одна из сторон треугольника равна $a$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан, проведённых к двум другим сторонам. **б)** Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности её оснований. **в)** Докажите, что средняя линия трапеции (то есть отрезок, соединяющий середины её боковых сторон) параллельна её основаниям и равна их полусумме.

$\boxed{9}$ С помощью циркуля и линейки постройте пятиугольник, если даны середины всех его сторон.
*Подсказка:* воспользуйтесь задачей 6.



## Листок 4. Средняя линия треугольника

**Определение.** *Средняя линия треугольника* — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

**Теорема** (свойства средней линии треугольника)**.** *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

$\boxed{1}$ В треугольнике провели три средние линии.
**а)** Докажите, что они разбивают его на четыре равных треугольника.
**б)** Найдите периметр каждого из них, если периметр исходного треугольника равен 28.

$\boxed{2}$ Длины двух сторон треугольника равны $a$ и $b$. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр образовавшегося при этом четырёхугольника.

$\boxed{3}$ Средняя линия, параллельная стороне $AC$ треугольника $ABC$, равна половине стороны $AB$. Докажите, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

$\boxed{4}$ С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если даны середины трёх его сторон.

$\boxed{5}$ Точки $M$ и $N$ расположены соответственно на сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$, причём $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. **а)** Докажите, что $MN||BC$. **б)** Найдите $MN$, если $BC = 12$.

$\boxed{6}$ **а)** Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. **б)** Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

$\boxed{7}$ Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.

$\boxed{8}$ **а)** Одна из сторон треугольника равна $a$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан, проведённых к двум другим сторонам. **б)** Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности её оснований. **в)** Докажите, что средняя линия трапеции (то есть отрезок, соединяющий середины её боковых сторон) параллельна её основаниям и равна их полусумме.

$\boxed{9}$ С помощью циркуля и линейки постройте пятиугольник, если даны середины всех его сторон.
*Подсказка:* воспользуйтесь задачей 6.

7

## Листок 5. Построение отрезков

Для решения задач сегодняшнего занятия вам могут пригодиться следующие факты.

1. **Теорема Фале́са.** Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на прямой $a$, а точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — на прямой $b$, причём $A_1B_1 || A_2B_2 || A_3B_3 || \ldots || A_nB_n$ и $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$. Тогда $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$.
2. **Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике с катетами $a$ и $b$ и гипотенузой $c$ имеет место равенство $a^2 + b^2 = c^2$.
3. Если в прямоугольном треугольнике основание высоты $h$, опущенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки $a_c$ и $b_c$, то $h^2 = a_c \cdot b_c$.

$\boxed{1}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины: **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** $\frac{1}{5}$; **г)** $\frac{4}{5}$; **д)** $\frac{1}{n}$; **е)** $\frac{m}{n}$ ($m, n$ — натуральные числа).
Подсказка: воспользуйтесь теоремой Фалеса.

$\boxed{2}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{5}$; **в)** $\sqrt{8}$; **г)** $\sqrt{13}$; **д)** $\sqrt{17}$.
Подсказка: воспользуйтесь теоремой Пифагора.

$\boxed{3}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля, линейки и результатов предыдущей задачи постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{6}$; **в)** $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{14}$.

$\boxed{4}$ **а)** Даны отрезки длины 1 и $\sqrt{k}$ ($k$ — натуральное число). С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{k+1}$.
**б)** Докажите, что, имея отрезок длины 1, можно с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\sqrt{n}$ для любого натурального $n$.

$\boxed{5}$ Дан отрезок длины 1 и натуральные числа $m$ и $n$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.
Подсказка: воспользуйтесь задачами 1 и 4.

$\boxed{6}$ **а)** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу. (Подсказка: в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.) **б)** Даны отрезки длины $a$ и $b$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab}$.

$\boxed{7}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля, линейки и результатов предыдущей задачи постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{6}$; **б)** $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

$\boxed{8}$ Даны отрезки длины $a, b, c$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\dfrac{ab}{c}$. Подсказка: воспользуйтесь подобными треугольниками.



## Листок 5. Построение отрезков

Для решения задач сегодняшнего занятия вам могут пригодиться следующие факты.

1. **Теорема Фале́са.** Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на прямой $a$, а точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — на прямой $b$, причём $A_1B_1 || A_2B_2 || A_3B_3 || \ldots || A_nB_n$ и $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$. Тогда $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$.
2. **Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике с катетами $a$ и $b$ и гипотенузой $c$ имеет место равенство $a^2 + b^2 = c^2$.
3. Если в прямоугольном треугольнике основание высоты $h$, опущенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки $a_c$ и $b_c$, то $h^2 = a_c \cdot b_c$.

$\boxed{1}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины: **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** $\frac{1}{5}$; **г)** $\frac{4}{5}$; **д)** $\frac{1}{n}$; **е)** $\frac{m}{n}$ ($m, n$ — натуральные числа).
Подсказка: воспользуйтесь теоремой Фалеса.

$\boxed{2}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{5}$; **в)** $\sqrt{8}$; **г)** $\sqrt{13}$; **д)** $\sqrt{17}$.
Подсказка: воспользуйтесь теоремой Пифагора.

$\boxed{3}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля, линейки и результатов предыдущей задачи постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{6}$; **в)** $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{14}$.

$\boxed{4}$ **а)** Даны отрезки длины 1 и $\sqrt{k}$ ($k$ — натуральное число). С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{k+1}$.
**б)** Докажите, что, имея отрезок длины 1, можно с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\sqrt{n}$ для любого натурального $n$.

$\boxed{5}$ Дан отрезок длины 1 и натуральные числа $m$ и $n$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.
Подсказка: воспользуйтесь задачами 1 и 4.

$\boxed{6}$ **а)** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу. (Подсказка: в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.) **б)** Даны отрезки длины $a$ и $b$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab}$.

$\boxed{7}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля, линейки и результатов предыдущей задачи постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{6}$; **б)** $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

$\boxed{8}$ Даны отрезки длины $a, b, c$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\dfrac{ab}{c}$. Подсказка: воспользуйтесь подобными треугольниками.

8

## Листок 6. Пифагоровы треугольники

**Определение.** Прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого выражаются целыми числами, называется *пифагоровым треугольником.*

**Определение.** Набор натуральных чисел $(a, b, c)$ называется *пифагоровой тройкой,* если он удовлетворяет равенству $a^2 + b^2 = c^2$. Другими словами, пифагорова тройка — это набор длин сторон некоторого пифагорова треугольника.

$\boxed{1}$ Зная длины двух сторон пифагорова треугольника, найдите длину третьей стороны и выясните, какая из сторон является гипотенузой:
**а)** 3 и 5; **б)** 24 и 25; **в)** 8 и 15; **г)** 5 и 13; **д)** 9 и 41.

$\boxed{2}$ Приведите пример пифагорова треугольника с заданной длиной гипотенузы:
**а)** 15; **б)** 39; **в)** 100; **г)** 289.

$\boxed{3}$ Докажите, что пифагоровых троек бесконечно много.

$\boxed{4}$ **а)** Существуют ли равнобедренные пифагоровы треугольники?
**б)** Существуют ли пифагоровы треугольники с острым углом 30°?

$\boxed{5}$ Может ли пифагорова тройка состоять из трёх нечётных чисел?

$\boxed{6}$ **а)** Какие остатки от деления на 4 могут давать квадраты целых чисел?
**б)** Могут ли оба катета пифагорова треугольника иметь нечётные длины?
**в)** Докажите, что площадь пифагорова треугольника всегда выражается целым числом.

$\boxed{7}$ В некотором пифагоровом треугольнике длины сторон — взаимно простые числа (такой пифагоров треугольник называется *примитивным*). Докажите, что длина гипотенузы нечётна, а длины катетов — разной чётности.

$\boxed{8}$ Сколько существует пифагоровых треугольников, в которых один из катетов равен: **а)** 7; **б)** 15; **в)** 1; **г)** 4; **д)** 6?
*Подсказка: составьте и решите уравнение в целых числах с помощью теоремы Пифагора.*

$\boxed{9}$ Докажите, что для любого нечётного числа, кроме 1, существует пифагоров треугольник, в котором длина одного из катетов равна этому числу. Какие из этих треугольников заведомо не подобны друг другу?

$\boxed{10}$ Докажите, что существует бесконечно много пифагоровых треугольников, не подобных друг другу.

$\boxed{11}$ Докажите, что в пифагоровом треугольнике: **а)** длина одного из катетов делится на 3; **б)** длина одной из трёх сторон делится на 5; **в)** произведение длин катетов делится на 12.



## Листок 6. Пифагоровы треугольники

**Определение.** Прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого выражаются целыми числами, называется *пифагоровым треугольником.*

**Определение.** Набор натуральных чисел $(a, b, c)$ называется *пифагоровой тройкой,* если он удовлетворяет равенству $a^2 + b^2 = c^2$. Другими словами, пифагорова тройка — это набор длин сторон некоторого пифагорова треугольника.

$\boxed{1}$ Зная длины двух сторон пифагорова треугольника, найдите длину третьей стороны и выясните, какая из сторон является гипотенузой:
**а)** 3 и 5; **б)** 24 и 25; **в)** 8 и 15; **г)** 5 и 13; **д)** 9 и 41.

$\boxed{2}$ Приведите пример пифагорова треугольника с заданной длиной гипотенузы:
**а)** 15; **б)** 39; **в)** 100; **г)** 289.

$\boxed{3}$ Докажите, что пифагоровых троек бесконечно много.

$\boxed{4}$ **а)** Существуют ли равнобедренные пифагоровы треугольники?
**б)** Существуют ли пифагоровы треугольники с острым углом 30°?

$\boxed{5}$ Может ли пифагорова тройка состоять из трёх нечётных чисел?

$\boxed{6}$ **а)** Какие остатки от деления на 4 могут давать квадраты целых чисел?
**б)** Могут ли оба катета пифагорова треугольника иметь нечётные длины?
**в)** Докажите, что площадь пифагорова треугольника всегда выражается целым числом.

$\boxed{7}$ В некотором пифагоровом треугольнике длины сторон — взаимно простые числа (такой пифагоров треугольник называется *примитивным*). Докажите, что длина гипотенузы нечётна, а длины катетов — разной чётности.

$\boxed{8}$ Сколько существует пифагоровых треугольников, в которых один из катетов равен: **а)** 7; **б)** 15; **в)** 1; **г)** 4; **д)** 6?
*Подсказка: составьте и решите уравнение в целых числах с помощью теоремы Пифагора.*

$\boxed{9}$ Докажите, что для любого нечётного числа, кроме 1, существует пифагоров треугольник, в котором длина одного из катетов равна этому числу. Какие из этих треугольников заведомо не подобны друг другу?

$\boxed{10}$ Докажите, что существует бесконечно много пифагоровых треугольников, не подобных друг другу.

$\boxed{11}$ Докажите, что в пифагоровом треугольнике: **а)** длина одного из катетов делится на 3; **б)** длина одной из трёх сторон делится на 5; **в)** произведение длин катетов делится на 12.

9

## Листок 7. Равные площади

$\boxed{1}$ В трапеции с основаниями $BC$ и $AD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Докажите, что: **а)** $S(\Delta ABC) = S(\Delta BCD)$; **б)** $S(\Delta AOB) = S(\Delta COD)$.

$\boxed{2}$ В треугольника $ABC$ проведена биссектриса $BL$.
**а)** Докажите, что $S(\Delta ABL) : S(\Delta BCL) = AL : CL = AB : BC$.
**б)** Найдите $AB$, если $BC = 9$, $AL = 7{,}5$, $CL = 4{,}5$.
**в)** Найдите $LC$, если $AB = 30$, $AL = 20$, $BC = 16$.

$\boxed{3}$ Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка $O$. Докажите, что

$$S(\Delta AOB) + S(\Delta COD) = \frac{1}{2}S(ABCD) = S(\Delta BOC) + S(\Delta AOD).$$

$\boxed{4}$ **а)** Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.
**б)** Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении $3 : 1$ по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

$\boxed{5}$ На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты («пифагоровы штаны»). Их вершины соединены так, как показано на рис. 1. Докажите равенство площадей серых треугольников.

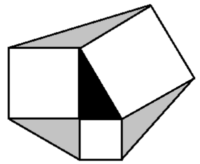

Рис. 1.

$\boxed{6}$ **а)** Точки $K, L, M, N$ — середины сторон параллелограмма $ABCD$. Прямые $DK, BM, AL, CN$ ограничивают маленький параллелограмм. Найдите отношение площадей параллелограммов. **б)** В выпуклом четырёхугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рис. 2. Докажите, что площадь чёрного четырёхугольника равна сумме площадей серых треугольников.

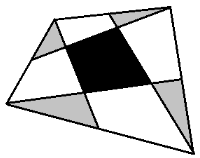

Рис. 2.

$\boxed{7}$ Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (см. рис. 3). Докажите, что сумма площадей белых частей равна сумме площадей серых частей.

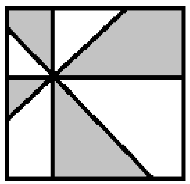

Рис. 3.



## Листок 7. Равные площади

$\boxed{1}$ В трапеции с основаниями $BC$ и $AD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Докажите, что: **а)** $S(\Delta ABC) = S(\Delta BCD)$; **б)** $S(\Delta AOB) = S(\Delta COD)$.

$\boxed{2}$ В треугольника $ABC$ проведена биссектриса $BL$.
**а)** Докажите, что $S(\Delta ABL) : S(\Delta BCL) = AL : CL = AB : BC$.
**б)** Найдите $AB$, если $BC = 9$, $AL = 7{,}5$, $CL = 4{,}5$.
**в)** Найдите $LC$, если $AB = 30$, $AL = 20$, $BC = 16$.

$\boxed{3}$ Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка $O$. Докажите, что

$$S(\Delta AOB) + S(\Delta COD) = \frac{1}{2}S(ABCD) = S(\Delta BOC) + S(\Delta AOD).$$

$\boxed{4}$ **а)** Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.
**б)** Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении $3 : 1$ по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

$\boxed{5}$ На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты («пифагоровы штаны»). Их вершины соединены так, как показано на рис. 1. Докажите равенство площадей серых треугольников.

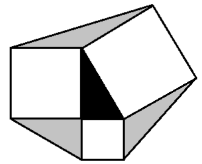

Рис. 1.

$\boxed{6}$ **а)** Точки $K, L, M, N$ — середины сторон параллелограмма $ABCD$. Прямые $DK, BM, AL, CN$ ограничивают маленький параллелограмм. Найдите отношение площадей параллелограммов. **б)** В выпуклом четырёхугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рис. 2. Докажите, что площадь чёрного четырёхугольника равна сумме площадей серых треугольников.

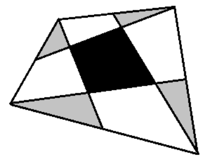

Рис. 2.

$\boxed{7}$ Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (см. рис. 3). Докажите, что сумма площадей белых частей равна сумме площадей серых частей.

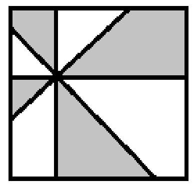

Рис. 3.

10

## Листок 8. Сложить или умножить?

***Правило суммы.*** Если объект $A$ можно выбрать $m$ способами, а объект $B$ можно выбрать $n$ способами, то выбор «$A$ или $B$» можно осуществить $m+n$ способами.
***Правило произведения.*** Если объект $A$ можно выбрать $m$ способами и при каждом таком выборе объект $B$ можно выбрать $n$ способами, то выбор «$A$ и $B$» можно осуществить $m \cdot n$ способами.

**1** Чтобы доехать из дома на завод, токарь Петрович едет сначала на маршрутке от дома до метро, потом на метро (с пересадками), а потом на трамвае от метро до завода. От дома до метро ходят пять разных маршруток, от метро до завода — три трамвая, а на метро можно ехать по кольцу или через центр. Сколько разных маршрутов на работу и обратно может придумать Петрович, чтобы нёмного разнообразить свою жизнь?

**2** **а)** Токарь Петрович работает на станке, на котором есть четыре двухпозиционных переключателя. Сколько всего режимов работы у этого станка? **б)** Петрович не первый год мечтает о более современном станке, у которого помимо четырёх двухпозиционных переключателей было бы ещё три трёхпозиционных. Сколько режимов работы у станка мечты Петровича?

**3** **а)** Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5? **б)** Сколько существует натуральных чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

**4** В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год (например, 09.12.2015 — двенадцатое сентября 2015 года). А в Европе и в России сначала пишут число, потом месяц и год (например, двенадцатое сентября 2015 года записывают так: 12.09.2015). Сколько в году дней, дату которых нельзя расшифровать однозначно, не зная, каким способом она написана?

**5** Семизначный телефонный номер называется *красивым*, если в нём чётные цифры чередуются с нечётными и нет нулей. Сколько всего существует красивых номеров?

**6** Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трёх курьеров, причём каждое письмо можно дать любому из курьеров?

**7** Никанор поставил на смартфон четырёхзначный цифровой код разблокировки, а потом забыл его. Никанор помнит только, что в коде были числа 23 и 37. С какой попытки Никанор наверняка сможет подобрать код и разблокировать экран смартфона?

**8** Подобрав наконец код, Никанор решил, что цифры — это слишком сложно для него, и поставил на смартфон графический пароль. Теперь, чтобы разблокировать экран, надо в правильном порядке соединить ломаной какие-то четыре из изображенных на экране девяти точек (они расположены по кругу). Сколько попыток нужно, чтобы наверняка подобрать этот пароль, если: **а)** знать, какие точки соединять, но не знать, в каком порядке; **б)** не знать, какие точки соединять?

**9** Заметим, что если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, а остальные потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

**10** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две: **а)** разноцветных **б)** белых ладьи так, чтобы они не били друг друга?



## Листок 8. Сложить или умножить?

***Правило суммы.*** Если объект $A$ можно выбрать $m$ способами, а объект $B$ можно выбрать $n$ способами, то выбор «$A$ или $B$» можно осуществить $m+n$ способами.
***Правило произведения.*** Если объект $A$ можно выбрать $m$ способами и при каждом таком выборе объект $B$ можно выбрать $n$ способами, то выбор «$A$ и $B$» можно осуществить $m \cdot n$ способами.

**1** Чтобы доехать из дома на завод, токарь Петрович едет сначала на маршрутке от дома до метро, потом на метро (с пересадками), а потом на трамвае от метро до завода. От дома до метро ходят пять разных маршруток, от метро до завода — три трамвая, а на метро можно ехать по кольцу или через центр. Сколько разных маршрутов на работу и обратно может придумать Петрович, чтобы нёмного разнообразить свою жизнь?

**2** **а)** Токарь Петрович работает на станке, на котором есть четыре двухпозиционных переключателя. Сколько всего режимов работы у этого станка? **б)** Петрович не первый год мечтает о более современном станке, у которого помимо четырёх двухпозиционных переключателей было бы ещё три трёхпозиционных. Сколько режимов работы у станка мечты Петровича?

**3** **а)** Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5? **б)** Сколько существует натуральных чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

**4** В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год (например, 09.12.2015 — двенадцатое сентября 2015 года). А в Европе и в России сначала пишут число, потом месяц и год (например, двенадцатое сентября 2015 года записывают так: 12.09.2015). Сколько в году дней, дату которых нельзя расшифровать однозначно, не зная, каким способом она написана?

**5** Семизначный телефонный номер называется *красивым*, если в нём чётные цифры чередуются с нечётными и нет нулей. Сколько всего существует красивых номеров?

**6** Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трёх курьеров, причём каждое письмо можно дать любому из курьеров?

**7** Никанор поставил на смартфон четырёхзначный цифровой код разблокировки, а потом забыл его. Никанор помнит только, что в коде были числа 23 и 37. С какой попытки Никанор наверняка сможет подобрать код и разблокировать экран смартфона?

**8** Подобрав наконец код, Никанор решил, что цифры — это слишком сложно для него, и поставил на смартфон графический пароль. Теперь, чтобы разблокировать экран, надо в правильном порядке соединить ломаной какие-то четыре из изображенных на экране девяти точек (они расположены по кругу). Сколько попыток нужно, чтобы наверняка подобрать этот пароль, если: **а)** знать, какие точки соединять, но не знать, в каком порядке; **б)** не знать, какие точки соединять?

**9** Заметим, что если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, а остальные потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

**10** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две: **а)** разноцветных **б)** белых ладьи так, чтобы они не били друг друга?

11

## Листок 9. Факториал!

$\boxed{1}$ Консьержка Клавдия Семёновна решила поменять в своем подъезде код домофона. Она хочет составить новый четырёхзначный код из цифр 1, 9, 4, 5. Сколько таких кодов можно составить, если: **а)** цифры могут повторяться; **б)** цифры не должны повторяться?

$\boxed{2}$ **а)** Клавдия Семёновна выращивает на подоконнике цветы. У неё есть синий, зеленый, коричневый и оранжевый горшки. Сколькими способами Клавдия Семёновна может расставить их в ряд на подоконнике? **б)** Синий горшок разбился, и Клавдия Семёновна купила вместо него ещё один оранжевый — точь-в-точь такой же, как у неё уже есть. Сколько способов расставить горшки на подоконнике теперь?

$\boxed{3}$ **а)** Сколькими способами можно расставить 8 одинаковых ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга (не стояли на одной вертикали или горизонтали)? **б)** А если все ладьи разные (скажем, пронумерованы)?

$\boxed{4}$ *Анаграммой* называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов: **а)** ТОЧКА; **б)** ПРЯМАЯ; **в)** МОЛОКО; **г)** БИССЕКТРИСА?

$\boxed{5}$ Упростите выражения: **а)** $k! \cdot (k+1)$; **б)** $k! : (k-1)!$; **в)** $(k+2)! : k!$.

$\boxed{6}$ Какое из чисел $5! + 3!$ и $8!$ больше и во сколько раз?

$\boxed{7}$ Правда ли, что: **а)** $9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9! = 10!$; **б)** $(k+l)! = k!+l!$; **в)** $(k+1)! = k!+1$; **г)** $(k/2)! = k!/2$; **д)** $(k \cdot l)! = k! \cdot l!$; **е)** $k! \cdot (k+1) = (k+1)!$; **ж)** $(k+l)! = k! \cdot l!$; **з)** $k! : l! = (k:l)!$; **и)** $k! : l! = (k-l)!$; **й)** $(k!)! = (k!)^2$? Если правда, докажите, если нет — приведите контрпример (то есть пример, показывающий, что утверждение неверное).

$\boxed{8}$ Докажите, что уравнение $x! \cdot y! = z!$ имеет бесконечное число решений в натуральных числах, для которых $x, y \neq 1$.



## Листок 9. Факториал!

$\boxed{1}$ Консьержка Клавдия Семёновна решила поменять в своем подъезде код домофона. Она хочет составить новый четырёхзначный код из цифр 1, 9, 4, 5. Сколько таких кодов можно составить, если: **а)** цифры могут повторяться; **б)** цифры не должны повторяться?

$\boxed{2}$ **а)** Клавдия Семёновна выращивает на подоконнике цветы. У неё есть синий, зеленый, коричневый и оранжевый горшки. Сколькими способами Клавдия Семёновна может расставить их в ряд на подоконнике? **б)** Синий горшок разбился, и Клавдия Семёновна купила вместо него ещё один оранжевый — точь-в-точь такой же, как у неё уже есть. Сколько способов расставить горшки на подоконнике теперь?

$\boxed{3}$ **а)** Сколькими способами можно расставить 8 одинаковых ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга (не стояли на одной вертикали или горизонтали)? **б)** А если все ладьи разные (скажем, пронумерованы)?

$\boxed{4}$ *Анаграммой* называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов: **а)** ТОЧКА; **б)** ПРЯМАЯ; **в)** МОЛОКО; **г)** БИССЕКТРИСА?

$\boxed{5}$ Упростите выражения: **а)** $k! \cdot (k+1)$; **б)** $k! : (k-1)!$; **в)** $(k+2)! : k!$.

$\boxed{6}$ Какое из чисел $5! + 3!$ и $8!$ больше и во сколько раз?

$\boxed{7}$ Правда ли, что: **а)** $9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9! = 10!$; **б)** $(k+l)! = k!+l!$; **в)** $(k+1)! = k!+1$; **г)** $(k/2)! = k!/2$; **д)** $(k \cdot l)! = k! \cdot l!$; **е)** $k! \cdot (k+1) = (k+1)!$; **ж)** $(k+l)! = k! \cdot l!$; **з)** $k! : l! = (k:l)!$; **и)** $k! : l! = (k-l)!$; **й)** $(k!)! = (k!)^2$? Если правда, докажите, если нет — приведите контрпример (то есть пример, показывающий, что утверждение неверное).

$\boxed{8}$ Докажите, что уравнение $x! \cdot y! = z!$ имеет бесконечное число решений в натуральных числах, для которых $x, y \neq 1$.

## Листок 10. От порядка к беспорядку

$\boxed{1}$ Сколько наборов букв можно получить перестановкой из слов:
**а)** ААУ; **б)** АААУУ; **в)** ААААУУ; **г)** АААААУУУ; **д)** $A\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **е)** $AA\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **ж)** $\underbrace{A\ldots A}_{k}\underbrace{Y\ldots Y}_{n-k}$; **з)** $\underbrace{A\ldots A}_{n-k}\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **и)** $\underbrace{A_1\ldots A_1}_{k_1}\underbrace{A_2\ldots A_2}_{k_2}\ldots\underbrace{A_m\ldots A_m}_{k_m}$?

$\boxed{2}$ Сколькими способами можно: **а)** из 5 ребят выбрать двоих; **б)** из 6 ребят выбрать четверых; **в)** из 7 ребят выбрать троих; **г)** из $n$ ребят выбрать $k$?

**Определение.** Число способов выбрать из $n$ различных предметов $k$ различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, важен, называется *числом размещённий без повторений из $n$ по $k$* и обозначается $A_n^k$ (читается «а из эн по ка»).
Число способов сделать такой выбор, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из $n$ по $k$* и обозначается $C_n^k$ (читается «цэ из эн по ка»).

$\boxed{3}$ Докажите, что

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

$\boxed{4}$ На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

$\boxed{5}$ Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

$\boxed{6}$ Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой горизонтали шахматной доски?

$\boxed{7}$ Сколько есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника $5 \times 9$ в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

$\boxed{8}$ Сколько существует шестизначных чисел, в которых каждая цифра, начиная со второй, меньше, чем предыдущая?



## Листок 10. От порядка к беспорядку

$\boxed{1}$ Сколько наборов букв можно получить перестановкой из слов:
**а)** ААУ; **б)** АААУУ; **в)** ААААУУ; **г)** АААААУУУ; **д)** $A\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **е)** $AA\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **ж)** $\underbrace{A\ldots A}_{k}\underbrace{Y\ldots Y}_{n-k}$; **з)** $\underbrace{A\ldots A}_{n-k}\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **и)** $\underbrace{A_1\ldots A_1}_{k_1}\underbrace{A_2\ldots A_2}_{k_2}\ldots\underbrace{A_m\ldots A_m}_{k_m}$?

$\boxed{2}$ Сколькими способами можно: **а)** из 5 ребят выбрать двоих; **б)** из 6 ребят выбрать четверых; **в)** из 7 ребят выбрать троих; **г)** из $n$ ребят выбрать $k$?

**Определение.** Число способов выбрать из $n$ различных предметов $k$ различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, важен, называется *числом размещённий без повторений из $n$ по $k$* и обозначается $A_n^k$ (читается «а из эн по ка»).
Число способов сделать такой выбор, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из $n$ по $k$* и обозначается $C_n^k$ (читается «цэ из эн по ка»).

$\boxed{3}$ Докажите, что

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

$\boxed{4}$ На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

$\boxed{5}$ Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

$\boxed{6}$ Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой горизонтали шахматной доски?

$\boxed{7}$ Сколько есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника $5 \times 9$ в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

$\boxed{8}$ Сколько существует шестизначных чисел, в которых каждая цифра, начиная со второй, меньше, чем предыдущая?

13

## Листок 11. Много похожих задач

*Не решая задач, разбейте их на группы «одинаковых» задач. Затем решите задачи каждой группы.*

$\boxed{1}$ Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?

$\boxed{2}$ Сколько всего сторон и диагоналей у 36-угольника?

$\boxed{3}$ Есть 36 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их 36 девочкам?

$\boxed{4}$ Есть 6 видов конфет, по мешку каждого вида. Сколько существует способов угостить ими 6 девочек так, чтобы ни одной не попалось двух одинаковых конфет?

$\boxed{5}$ В магазине продаются чашки шести видов и блюдца шести видов. Сколькими способами можно выбрать два различных набора из чашки и блюдца?

$\boxed{6}$ Сколько существует способов раскраски доски $6 \times 6$ в два цвета? Раскраски, отличающиеся только поворотом доски, считаем различными.

$\boxed{7}$ **а)** Сколькими способами можно расставить на доске $6 \times 6$ числа от 1 до 36? **б)** Сколькими способами можно поставить на доске $6 \times 6$ две ладьи? **в)** Сколькими способами можно на доске $36 \times 36$ расставить 36 одинаковых ладей, не бьющих друг друга? Расстановки, отличающиеся только поворотом доски, во всех пунктах считаем различными.

$\boxed{8}$ Во рту у злой акулы 6 рядов зубов по 6 зубов в каждом ряду. Если зуб выбить, то он уже не вырастает. Жак Ив Кусто поймал несколько акул, причём среди них нет двух акул с одинаковым набором зубов (т. е. если взять любых двух, найдётся место, где у одной зуб есть, а у другой — нет.) Каким может быть максимальное число пойманных акул?

$\boxed{9}$ Компьютер работает с двоичными кодами, которые представляют собой записи, составленные из нулей и единиц (например, 001011101). Количество знаков в коде называется его длиной. Сколько различных символов можно закодировать кодом длины 36?

$\boxed{10}$ Имеется 34 ёжика и 2 дикобраза. Сколько существует способов отправить по одному зверьку в 36 зоопарков?



## Листок 11. Много похожих задач

*Не решая задач, разбейте их на группы «одинаковых» задач. Затем решите задачи каждой группы.*

$\boxed{1}$ Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?

$\boxed{2}$ Сколько всего сторон и диагоналей у 36-угольника?

$\boxed{3}$ Есть 36 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их 36 девочкам?

$\boxed{4}$ Есть 6 видов конфет, по мешку каждого вида. Сколько существует способов угостить ими 6 девочек так, чтобы ни одной не попалось двух одинаковых конфет?

$\boxed{5}$ В магазине продаются чашки шести видов и блюдца шести видов. Сколькими способами можно выбрать два различных набора из чашки и блюдца?

$\boxed{6}$ Сколько существует способов раскраски доски $6 \times 6$ в два цвета? Раскраски, отличающиеся только поворотом доски, считаем различными.

$\boxed{7}$ **а)** Сколькими способами можно расставить на доске $6 \times 6$ числа от 1 до 36? **б)** Сколькими способами можно поставить на доске $6 \times 6$ две ладьи? **в)** Сколькими способами можно на доске $36 \times 36$ расставить 36 одинаковых ладей, не бьющих друг друга? Расстановки, отличающиеся только поворотом доски, во всех пунктах считаем различными.

$\boxed{8}$ Во рту у злой акулы 6 рядов зубов по 6 зубов в каждом ряду. Если зуб выбить, то он уже не вырастает. Жак Ив Кусто поймал несколько акул, причём среди них нет двух акул с одинаковым набором зубов (т. е. если взять любых двух, найдётся место, где у одной зуб есть, а у другой — нет.) Каким может быть максимальное число пойманных акул?

$\boxed{9}$ Компьютер работает с двоичными кодами, которые представляют собой записи, составленные из нулей и единиц (например, 001011101). Количество знаков в коде называется его длиной. Сколько различных символов можно закодировать кодом длины 36?

$\boxed{10}$ Имеется 34 ёжика и 2 дикобраза. Сколько существует способов отправить по одному зверьку в 36 зоопарков?

# Листок 12. Треугольник Паскаля

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

```
        1                          М
       1 1                        Е Е
      1 2 1                      Х Х Х
     1 3 3 1                    М М М М
    1 4 6 4 1                  А А А А А
  1 5 10 10 5 1               Т Т Т Т Т Т
… … … …… … … …
```

*(рисунок к задаче 7)*

Удобно использовать следующее обозначение: через $T_n^k$ будем обозначать число, стоящее на $k$-м слева месте в $n$-й строке треугольника Паскаля (считаем, что единица в каждой строке стоит на нулевом месте). Правила построения треугольника Паскаля в этих обозначениях можно записать так: $T_n^0 = T_n^n = 0,\ T_{n+1}^k = T_n^{k-1} + T_n^k$.

$\boxed{1}$ Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).

$\boxed{2}$ Сколько чисел в 2015-й строке треугольника Паскаля?

$\boxed{3}$ Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию. (*Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером $n$, то это верно и для строки с номером $n+1$.*)

$\boxed{4}$ **а)** Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2015? **б)** Сколько раз в треугольнике Паскаля встречается число 10?

$\boxed{5}$ **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2014-ю и 2015-ю строки.

$\boxed{6}$ **а)** Поставим знаки «+» и «−» между числами в 99-й строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак «−», между вторым и третьим — «+», между третьим и четвёртым — «−», потом опять «+», и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100-й строки. Докажите!

$\boxed{7}$ Сколькими способами, двигаясь по таблице (см. рисунок выше) от буквы к букве, можно прочитать слово МЕХМАТ? От каждой буквы можно переходить только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее.

$\boxed{8}$ Чему равна сумма чисел, стоящих: **а)** в третьей строке; **б)** в четвёртой строке; **в)** в седьмой строке; **г)** в $n$-й строке треугольника Паскаля?

$\boxed{9}$ Будем двигаться по треугольнику Паскаля по тем же правилам, что в задаче 7. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа $N$ в треугольнике Паскаля в точности равно $N$.




# Листок 12. Треугольник Паскаля

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

```
        1                          М
       1 1                        Е Е
      1 2 1                      Х Х Х
     1 3 3 1                    М М М М
    1 4 6 4 1                  А А А А А
  1 5 10 10 5 1               Т Т Т Т Т Т
… … … …… … … …
```

*(рисунок к задаче 7)*

Удобно использовать следующее обозначение: через $T_n^k$ будем обозначать число, стоящее на $k$-м слева месте в $n$-й строке треугольника Паскаля (считаем, что единица в каждой строке стоит на нулевом месте). Правила построения треугольника Паскаля в этих обозначениях можно записать так: $T_n^0 = T_n^n = 0,\ T_{n+1}^k = T_n^{k-1} + T_n^k$.

$\boxed{1}$ Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).

$\boxed{2}$ Сколько чисел в 2015-й строке треугольника Паскаля?

$\boxed{3}$ Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию. (*Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером $n$, то это верно и для строки с номером $n+1$.*)

$\boxed{4}$ **а)** Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2015? **б)** Сколько раз в треугольнике Паскаля встречается число 10?

$\boxed{5}$ **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2014-ю и 2015-ю строки.

$\boxed{6}$ **а)** Поставим знаки «+» и «−» между числами в 99-й строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак «−», между вторым и третьим — «+», между третьим и четвёртым — «−», потом опять «+», и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100-й строки. Докажите!

$\boxed{7}$ Сколькими способами, двигаясь по таблице (см. рисунок выше) от буквы к букве, можно прочитать слово МЕХМАТ? От каждой буквы можно переходить только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее.

$\boxed{8}$ Чему равна сумма чисел, стоящих: **а)** в третьей строке; **б)** в четвёртой строке; **в)** в седьмой строке; **г)** в $n$-й строке треугольника Паскаля?

$\boxed{9}$ Будем двигаться по треугольнику Паскаля по тем же правилам, что в задаче 7. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа $N$ в треугольнике Паскаля в точности равно $N$.

15

## Листок 13. История про футболки и сочетания

**Определение.** Число способов выбрать из $n$ различных предметов $k$ различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из $n$ по $k$* и обозначается $C_n^k$ (читается «цэ из эн по ка»).

**Теорема.** $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Прочитайте историю, а затем с её помощью попробуйте доказать различные свойства чисел сочетаний. В задачах **1–4** дайте по два доказательства: **а)** с помощью определения (тут вам и поможет история); **б)** с помощью теоремы.

*Николай собирался в отпуск на юг и выбирал, какие футболки с собой взять. Он ехал на неделю и хотел взять по одной футболке на каждый день, а всего у него было 10 футболок. Сначала Николай долго выбирал, какие футболки взять, но потом решил, что будет проще определиться, какие футболки НЕ брать.*

**1** $C_n^0 = C_n^n = 1$.

**2** $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

**3** (симметричность) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

*Среди 10 футболок у Николая есть одна любимая. Николай в сомнениях — то ли взять её с собой в отпуск, то ли оставить: мало ли, выгорит на солнце или запачкается.*

**4** (основное биномиальное тождество) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

**5** Пользуясь предыдущими задачами, докажите, что в треугольнике Паскаля в $n$-й строке на $k$-м слева месте стоит число $C_n^k$. (Строка из одной единицы имеет номер 0. В каждой строке начальная единица стоит на нулевом месте.)

*Пока футболки стирались, Николай начал сомневаться, стоит ли ему на каждый день брать по футболке. Может, проще взять с собой все футболки? А может, часть из них лучше оставить и вместо этого взять рубашки? В общем, сначала надо определиться, сколько футболок брать, а потом решить, какие именно. Или лучше ещё раз перебрать все футболки и про каждую решить, брать её или нет?*

**6** С помощью определения докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

*Определившись с футболками, Николай стал выбирать себе носки. Носков было много, поэтому он разложил их на две равные кучи и твёрдо решил брать половину. Взять левую кучу? Или правую? А может, один носок из левой, а остальные из правой? Или наоборот?*

**7** С помощью известных уже тождеств и определения докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$



## Листок 13. История про футболки и сочетания

**Определение.** Число способов выбрать из $n$ различных предметов $k$ различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из $n$ по $k$* и обозначается $C_n^k$ (читается «цэ из эн по ка»).

**Теорема.** $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Прочитайте историю, а затем с её помощью попробуйте доказать различные свойства чисел сочетаний. В задачах **1–4** дайте по два доказательства: **а)** с помощью определения (тут вам и поможет история); **б)** с помощью теоремы.

*Николай собирался в отпуск на юг и выбирал, какие футболки с собой взять. Он ехал на неделю и хотел взять по одной футболке на каждый день, а всего у него было 10 футболок. Сначала Николай долго выбирал, какие футболки взять, но потом решил, что будет проще определиться, какие футболки НЕ брать.*

**1** $C_n^0 = C_n^n = 1$.

**2** $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

**3** (симметричность) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

*Среди 10 футболок у Николая есть одна любимая. Николай в сомнениях — то ли взять её с собой в отпуск, то ли оставить: мало ли, выгорит на солнце или запачкается.*

**4** (основное биномиальное тождество) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

**5** Пользуясь предыдущими задачами, докажите, что в треугольнике Паскаля в $n$-й строке на $k$-м слева месте стоит число $C_n^k$. (Строка из одной единицы имеет номер 0. В каждой строке начальная единица стоит на нулевом месте.)

*Пока футболки стирались, Николай начал сомневаться, стоит ли ему на каждый день брать по футболке. Может, проще взять с собой все футболки? А может, часть из них лучше оставить и вместо этого взять рубашки? В общем, сначала надо определиться, сколько футболок брать, а потом решить, какие именно. Или лучше ещё раз перебрать все футболки и про каждую решить, брать её или нет?*

**6** С помощью определения докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

*Определившись с футболками, Николай стал выбирать себе носки. Носков было много, поэтому он разложил их на две равные кучи и твёрдо решил брать половину. Взять левую кучу? Или правую? А может, один носок из левой, а остальные из правой? Или наоборот?*

**7** С помощью известных уже тождеств и определения докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

16

## Листок 14. Формулы сокращённого умножения

| | |
|---|---|
| $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ | $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ |
| $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ | $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ |

$\boxed{1}$ Вычислите: **а)** $81^2$; **б)** $79^2$; **в)** $0{,}67 \cdot 0{,}73$; **г)** $10\frac{2}{7} \cdot 9\frac{5}{7}$; **д)** $\left(4\frac{5}{8}\right)^2$; **е)** $202^3$.

$\boxed{2}$ Вычислите: $\left(\dfrac{37{,}79+56{,}93}{37{,}79-56{,}93} - \dfrac{37{,}79-56{,}93}{37{,}79+56{,}93}\right) \cdot \left(\dfrac{37{,}79^2-56{,}93^2}{37{,}79 \cdot 56{,}93}\right)$.

$\boxed{3}$ Найдите значение произведения

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right).$$

$\boxed{4}$ Известно, что $a+b=7$, $a \cdot b = 2$.
Найдите: **а)** $ab^2+a^2b$; **б)** $a^2+b^2$; **в)** $(a-b)^2$; **г)** $a^3+b^3$; **д)** $a^3b^6+a^6b^3$.

$\boxed{5}$ Про действительное число $a$ известно, что $a - \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{3}$. Найдите:
**а)** $a^2+\dfrac{1}{a^2}$; **б)** $\dfrac{a^4+1}{2a^2}$; **в)** $a^3-\dfrac{1}{a^3}$; **г)** $\dfrac{a^{12}+1}{a^6}$.

$\boxed{6}$ **а)** Решите уравнение $x^2 = 20152014 \cdot 20152016 + 1$.
**б)** Два различных числа $x$ и $y$ (не обязательно целых) удовлетворяют равенству

$$x^2 - 2015x = y^2 - 2015y.$$

Найдите сумму чисел $x$ и $y$.
**в)** Про различные числа $a$ и $b$ известно, что $\dfrac{a}{b}+a = \dfrac{b}{a}+b$. Найдите $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

$\boxed{7}$ Докажите, что если $b = a-1$, то

$$(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{32}+b^{32}) = a^{64}-b^{64}.$$

$\boxed{8}$ Найдите значение выражения $\dfrac{a^3+b^3-3b^2+3b-1}{a^2-ab+a+(b-1)^2}$
при $a=-3-5\sqrt{3}$, $b=11+5\sqrt{3}$.

$\boxed{9}$ Найдите все пары натуральных чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих уравнению:
**а)** $x^2-y^2=19$; **б)** $x^2-y^2=111$.
**в)** Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых — также простое число.

$\boxed{10}$ **а)** Выведите формулу для квадрата суммы трёх чисел: $(a+b+c)^2 = ?$ **б)** Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=5$. Чему может равняться $a^2+b^2+c^2$? **в)** Известно, что $x+y+z=0$. Докажите, что $xy+yz+zx \leqslant 0$.

$\boxed{11}$ Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, является квадратом натурального числа.




## Листок 14. Формулы сокращённого умножения

| | |
|---|---|
| $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ | $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ |
| $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ | $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ |

$\boxed{1}$ Вычислите: **а)** $81^2$; **б)** $79^2$; **в)** $0{,}67 \cdot 0{,}73$; **г)** $10\frac{2}{7} \cdot 9\frac{5}{7}$; **д)** $\left(4\frac{5}{8}\right)^2$; **е)** $202^3$.

$\boxed{2}$ Вычислите: $\left(\dfrac{37{,}79+56{,}93}{37{,}79-56{,}93} - \dfrac{37{,}79-56{,}93}{37{,}79+56{,}93}\right) \cdot \left(\dfrac{37{,}79^2-56{,}93^2}{37{,}79 \cdot 56{,}93}\right)$.

$\boxed{3}$ Найдите значение произведения

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right).$$

$\boxed{4}$ Известно, что $a+b=7$, $a \cdot b = 2$.
Найдите: **а)** $ab^2+a^2b$; **б)** $a^2+b^2$; **в)** $(a-b)^2$; **г)** $a^3+b^3$; **д)** $a^3b^6+a^6b^3$.

$\boxed{5}$ Про действительное число $a$ известно, что $a - \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{3}$. Найдите:
**а)** $a^2+\dfrac{1}{a^2}$; **б)** $\dfrac{a^4+1}{2a^2}$; **в)** $a^3-\dfrac{1}{a^3}$; **г)** $\dfrac{a^{12}+1}{a^6}$.

$\boxed{6}$ **а)** Решите уравнение $x^2 = 20152014 \cdot 20152016 + 1$.
**б)** Два различных числа $x$ и $y$ (не обязательно целых) удовлетворяют равенству

$$x^2 - 2015x = y^2 - 2015y.$$

Найдите сумму чисел $x$ и $y$.
**в)** Про различные числа $a$ и $b$ известно, что $\dfrac{a}{b}+a = \dfrac{b}{a}+b$. Найдите $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

$\boxed{7}$ Докажите, что если $b = a-1$, то

$$(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{32}+b^{32}) = a^{64}-b^{64}.$$

$\boxed{8}$ Найдите значение выражения $\dfrac{a^3+b^3-3b^2+3b-1}{a^2-ab+a+(b-1)^2}$
при $a=-3-5\sqrt{3}$, $b=11+5\sqrt{3}$.

$\boxed{9}$ Найдите все пары натуральных чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих уравнению:
**а)** $x^2-y^2=19$; **б)** $x^2-y^2=111$.
**в)** Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых — также простое число.

$\boxed{10}$ **а)** Выведите формулу для квадрата суммы трёх чисел: $(a+b+c)^2 = ?$ **б)** Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=5$. Чему может равняться $a^2+b^2+c^2$? **в)** Известно, что $x+y+z=0$. Докажите, что $xy+yz+zx \leqslant 0$.

$\boxed{11}$ Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, является квадратом натурального числа.

17

# Листок 15. Неравенство о среднем

**Определение.** *Среднее арифметическое $n$ чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это частное от деления их суммы на их количество: $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
*Среднее геометрическое $n$* **положительных** *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это корень $n$-й степени из их произведения: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

**Теорема** (неравенство о среднем). *Если $a \geqslant b \geqslant 0$, то $a \geqslant \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b} \geqslant b$.*
*Все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a = b$.*

Другими словами, *среднее арифметическое любых двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, и оба средних заключены между самими числами.*

$\boxed{1}$ Докажите, что для всякого положительного числа $C$ и любых чисел $x, y$ выполняется неравенство $\dfrac{Cx^2}{2} + \dfrac{y^2}{2C} \geqslant xy$.

$\boxed{2}$ **а)** Какое наименьшее значение может принимать выражение $x + \dfrac{1}{9x}$ при положительных $x$?
**б)** При каком $x$ достигается наименьшее значение?

$\boxed{3}$ Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $ab > a + b$, то $a + b > 4$.

$\boxed{4}$ **а)** Докажите, что для любых положительных чисел $a, b, c, d$ имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

**б)** Когда достигается равенство?

$\boxed{5}$ Для любых $a, b, c > 0$ докажите неравенства:
**а)** $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$; **б)** $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

$\boxed{6}$ **а)** В треугольнике $ABC$ угол $C$ — прямой, $CH$ — высота. Докажите, что $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$. (Другими словами, *высота прямоугольного треугольника равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу.*)
*Подсказка:* сначала докажите, что $\Delta ACH \sim \Delta BCH$.
**б)** С помощью пункта а) докажите геометрически неравенство о среднем.
*Подсказка:* в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

$\boxed{7}$ Пусть $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 2$. Докажите, что:
**а)** $xy \leqslant 1 - ab$; **б)** $(a+2)(b+2) \geqslant 0$; **в)** $xy \leqslant ab + 2a + 2b + 3$.

$\boxed{8}$ **а)** Пусть $a > 1$, $b < 1$. Докажите, что $a + b > 1 + ab$.
**б)** Пусть $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Докажите, что $a + b + c \geqslant 3$.
**в)** Для любых $a, b, c > 0$ докажите неравенство $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.
**г)** Сформулируйте и докажите аналог этого неравенства для $n$ чисел.



# Листок 15. Неравенство о среднем

**Определение.** *Среднее арифметическое $n$ чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это частное от деления их суммы на их количество: $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
*Среднее геометрическое $n$* **положительных** *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это корень $n$-й степени из их произведения: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

**Теорема** (неравенство о среднем). *Если $a \geqslant b \geqslant 0$, то $a \geqslant \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b} \geqslant b$.*
*Все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a = b$.*

Другими словами, *среднее арифметическое любых двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, и оба средних заключены между самими числами.*

$\boxed{1}$ Докажите, что для всякого положительного числа $C$ и любых чисел $x, y$ выполняется неравенство $\dfrac{Cx^2}{2} + \dfrac{y^2}{2C} \geqslant xy$.

$\boxed{2}$ **а)** Какое наименьшее значение может принимать выражение $x + \dfrac{1}{9x}$ при положительных $x$?
**б)** При каком $x$ достигается наименьшее значение?

$\boxed{3}$ Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $ab > a + b$, то $a + b > 4$.

$\boxed{4}$ **а)** Докажите, что для любых положительных чисел $a, b, c, d$ имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

**б)** Когда достигается равенство?

$\boxed{5}$ Для любых $a, b, c > 0$ докажите неравенства:
**а)** $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$; **б)** $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

$\boxed{6}$ **а)** В треугольнике $ABC$ угол $C$ — прямой, $CH$ — высота. Докажите, что $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$. (Другими словами, *высота прямоугольного треугольника равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу.*)
*Подсказка:* сначала докажите, что $\Delta ACH \sim \Delta BCH$.
**б)** С помощью пункта а) докажите геометрически неравенство о среднем.
*Подсказка:* в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

$\boxed{7}$ Пусть $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 2$. Докажите, что:
**а)** $xy \leqslant 1 - ab$; **б)** $(a+2)(b+2) \geqslant 0$; **в)** $xy \leqslant ab + 2a + 2b + 3$.

$\boxed{8}$ **а)** Пусть $a > 1$, $b < 1$. Докажите, что $a + b > 1 + ab$.
**б)** Пусть $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Докажите, что $a + b + c \geqslant 3$.
**в)** Для любых $a, b, c > 0$ докажите неравенство $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.
**г)** Сформулируйте и докажите аналог этого неравенства для $n$ чисел.

18