

Симметрические многочлены

1. При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + xz + yz = 3a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

2. Пусть $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = a^{-1}. \end{cases}$ Докажите, что хотя бы одно из чисел x, y, z равно a .

3. Разложите многочлены на множители:

а) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

б) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$;

в) $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$.

4. Сумма целых чисел a, b, c равна 0. Докажите, что $2(a^4 + b^4 + c^4)$ — полный квадрат.

5. Докажите, что

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= x + y + z \\ a^2 + b^2 + c^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= x^3 + y^3 + z^3 \end{aligned} \right\} \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad a^n + b^n + c^n = x^n + y^n + z^n.$$

6. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}$. За раз любые два числа a и b стирают и вместо них записывают число $a + b + ab$. С полученным набором чисел делают то же самое и так до тех пор, пока не останется одно число. Что это за число?

7. Докажите, что при всех нечётных $n \geq 5$ многочлен $(x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n$ делится на многочлен $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$. Выпишите частное явно при $n = 5$.

8. При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Симметрические многочлены

1. При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + xz + yz = 3a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

2. При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему
$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

3. Пусть a и b — корни трёхчлена $x^2 - 10x + 12$. Составьте квадратный трёхчлен с парой корней:

- 1) $-a$ и $-b$;
- 2) $a + b$ и ab ;
- 3) $a + 1$ и $b + 1$;
- 4) a^2 и b^2 .

4. Пусть a, b, c — тройка корней многочлена $x^3 - 2x^2 + x + 1$. Составьте кубический многочлен с корнями ab, ac, bc .

5. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{100}$. За раз любые два числа a и b стирают и вместо них записывают число $a + b + ab$. С полученным набором чисел делают то же самое и так до тех пор, пока не останется одно число. Что это за число?

6. Докажите, что при всех нечётных $n \geq 5$ многочлен $(x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n$ делится на многочлен $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$. Выпишите частное явно при $n = 5$.