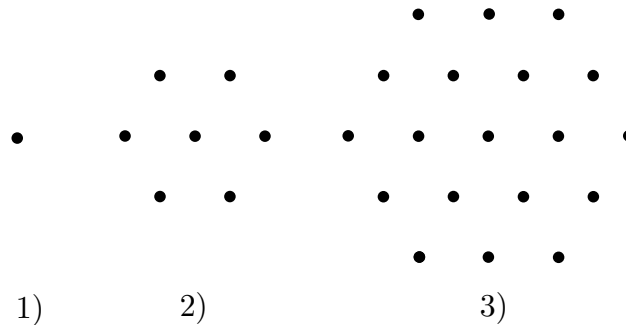


Раскраски и замощения

Геометрическое суммирование

1. Вычислите суммы: **а)** $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$; **б)** $1 + 2 + 3 + \dots + n$.
2. Докажите, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$.
4. На первом гексе 1 точка, на втором — 7. Сколько на третьем?



Сколько на первых двух вместе? А на первых трёх? А на первых ста?

5. *Задача Ферма.* Сосчитайте сумму $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.
6. В выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения у всех его диагоналей?
7. Вычислите суммы с помощью геометрии, индукции или комбинаторики (любым методом):
 - 1) $\sum_{k=1}^n k2^k$;
 - 2) $\sum_{k=1}^n k^2 2^k$;
 - 3) $\sum_{k=1}^n k C_n^k$;
 - 4) $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$;
 - 5) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$;
 - 6) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = 2^{n-2} + 2^{n/2-1} \cos \frac{\pi n}{4}$;
 - 7) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{\pi n}{3} \right)$.