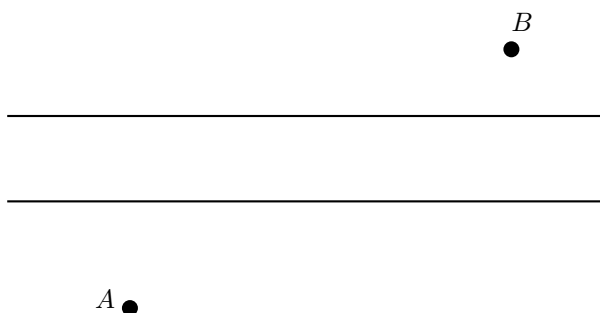


Кратчайший путь

1. Красной Шапочке нужно пройти от своего дома A до шоссе, дождаться там развозчика пирожков, купить пирожок и принести его бабушке, живущей в доме B по ту же сторону от шоссе. Начертите самый короткий путь Красной Шапочки.

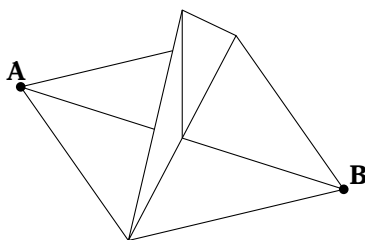


2. Путнику нужно попасть из пункта A в пункт B , расположенные по разные стороны от рва. У путника есть дощечка, длина которой равна ширине рва: её можно положить поперёк рва (перпендикулярно) и перейти по ней. Покажите, где расположить дощечку, чтобы путь из A в B был кратчайшим.



3. В музее Гугенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру и перейти к другим экспонатам (для этого достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

4. В вершине A квадрата со стороной 1 сидит муравей. Ему надо добраться до точки B — вход в муравейник. Точки A и B разделяет треугольная стена, боковые стороны которой тоже равны 1. Найдите длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.



5. **Задача Фаньяно.** Вписать в данный остроугольный треугольник другой треугольник с наименьшим периметром. Докажите, что это — ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями высот данного треугольника).

6. Исследуйте задачу Фаньяно для неостроугольного треугольника.

7. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , H — его ортоцентр (точка пересечения высот).

а) Найдите все вписанные четырёхугольники с вершинами в точках $A, B, C, A_1, B_1, C_1, H$.

б) Докажите, что лучи A_1A, B_1B, C_1C являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

8. Точка Ферма треугольника — это точка, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна. Точка Торичелли треугольника — это точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° . Докажите **теорему Ферма–Торичелли–Штейнера**: если все углы треугольника меньше 120° , то точка Торичелли существует и совпадает с точкой Ферма; иначе точка Торичелли не существует, а точка Ферма совпадает с вершиной тупого угла.

Кратчайший путь

1. Красной Шапочке нужно пройти от своего дома A до шоссе, дождаться там развозчика пирожков, купить пирожок и принести его бабушке, живущей в доме B по ту же сторону от шоссе. Начертите самый короткий путь Красной Шапочки.



2. Путнику нужно попасть из пункта A в пункт B , расположенные по разные стороны от рва. У путника есть дощечка, длина которой равна ширине рва: её можно положить поперёк рва (перпендикулярно) и перейти по ней. Покажите, где расположить дощечку, чтобы путь из A в B был кратчайшим.



3. В музее Гугенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру и перейти к другим экспонатам (для этого достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

4. **Задача Фаньяно.** Вписать в данный остроугольный треугольник другой треугольник с наименьшим периметром. Докажите, что это — ортотреугольник (треугольник, образованный основаниями высот данного треугольника).

5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , H — его ортоцентр (точка пересечения высот).

а) Найдите все вписанные четырёхугольники с вершинами в точках $A, B, C, A_1, B_1, C_1, H$.

б) Докажите, что лучи A_1A, B_1B, C_1C являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

6. Точка Ферма треугольника — это точка, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна. Точка Торичелли треугольника — это точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120° . Докажите **теорему Ферма–Торичелли–Штейнера**: если все углы треугольника меньше 120° , то точка Торичелли существует и совпадает с точкой Ферма; иначе точка Торичелли не существует, а точка Ферма совпадает с вершиной тупого угла.