

Делимость

1. Существует ли число вида $11 \dots 11$, кратное 123456789 ?
2. Для каждого из следующих подмножеств натурального ряда:
 - убедитесь, что оно содержит 1 и замкнуто относительно умножения;
 - опишите в нём все простые числа;
 - выясните, верна ли в нём основная теорема арифметики об однозначном разложении на простые множители.
- а) Множество нечётных чисел; б) множество степеней двойки $1, 2, 4, \dots$; в) множество чисел, дающих остаток 1 при делении на 4; г) множество степеней двойки, кроме двойки: $1, 4, 8, 16, \dots$
3. Сколько натуральных делителей у числа $11^{1001} \cdot 1001^{11}$?
4. Какие из следующих чисел простые: $6^{2020} - 1$, $2^{2020} - 1$, $2^{1001} - 1$, $2^7 - 1$?
5. Пусть $2^n + 1$ — простое число. Докажите, что n — степень двойки.
6. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых $n^4 + 4$ — простое число.
7. Докажите, что простых чисел вида а) $3k - 1$; б) $3k + 1$; в) $4k - 1$; г) $4k + 1$ бесконечно много.

Делимость

1. Существует ли число вида $11 \dots 11$, кратное 123456789 ?
2. Сколько натуральных делителей у чисел: а) 10^6 ; б) 1001 ; в) $11^{1001} \cdot 1001^{11}$?
3. Какие из следующих чисел простые: $6^{2020} - 1$, $2^{2020} - 1$, $2^{1001} - 1$, $2^7 - 1$?
4. Пусть $2^n + 1$ — простое число. Докажите, что n — степень двойки.
5. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых $n^4 + 4$ — простое число.
6. а) Докажите, что простых чисел бесконечно много (теорема Евклида).
б) Докажите, что простых чисел вида $3k - 1$ бесконечно много.