

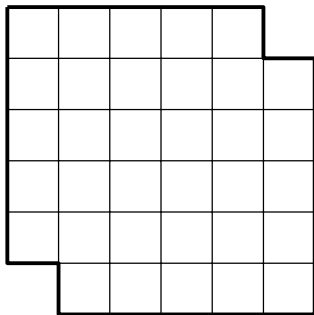
Раскраски и замощения

Малый мехмат МГУ

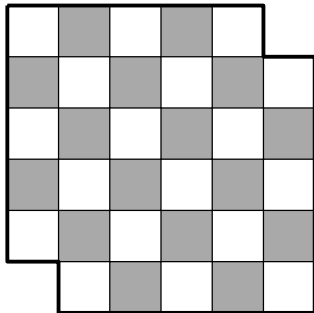
2 октября 2020 г.

Задача для затравки

У доски 6×6 вырезали две угловые клетки на диагонали. Можно ли покрыть оставшуюся часть доминошками из двух клеток?

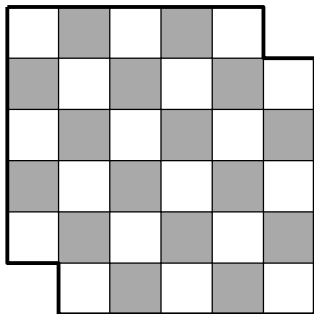


Задача для затравки: подсказка



Решение задачи для затравки

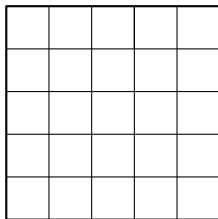
Раскрасим доску в шахматном порядке. Каждая доминошка покрывает белую и чёрную клетки, Поэтому в любой клетчатой фигуре, покрытой доминошками, белых и чёрных клеток поровну.



В этой фигуре белых клеток на две больше, поэтому её покрыть нельзя.

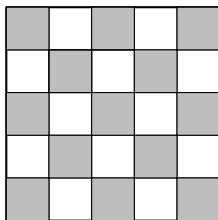
Переполюх

В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук.
Вдруг все жуки переполюзли на соседние клетки
(по стороне). Возможно ли, что и теперь
в каждой клетке сидит по жуку?



Переполох: подсказка

В каждой клетке **шахматной** доски 5×5 сидит жук. Вдруг все жуки переползли на соседние клетки (по стороне). Возможно ли, что и теперь в каждой клетке сидит по жуку?



Путешествие коня

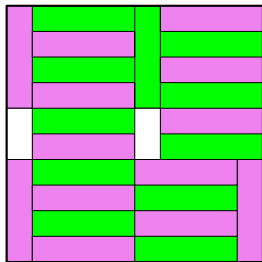
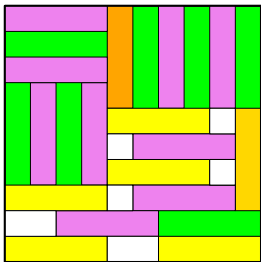
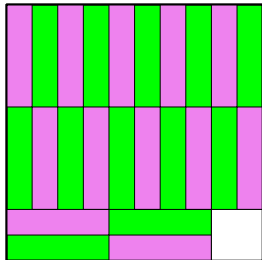
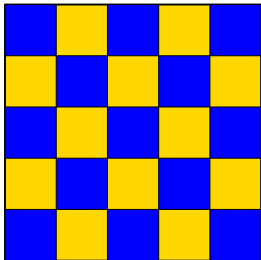
Шахматный конь хочет отправиться в путешествие по шахматной доске. Может ли он пройти с поля a1 на поле h8, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

Замечание. Не путайте с другой известной задачей: обойти конём все поля шахматной доски, побывав в каждом по разу и вернувшись на исходную клетку.

Замощение доски 10×10

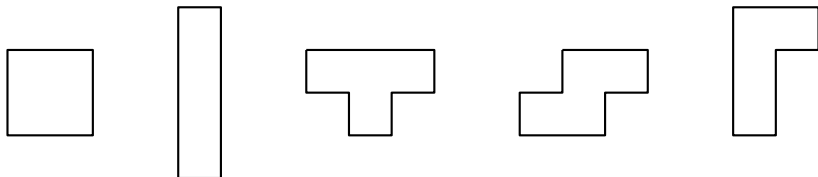
Незнайка легко замощает доску 10×10 квадратами 2×2 , а вот полосками из четырёх клеток у него никак не получается. А в принципе это возможно?

Замощение доски 10×10

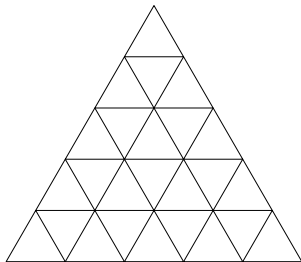


Замощение доски 10×10

Какими фигурками тетрамино можно замостить доску 10×10 ?

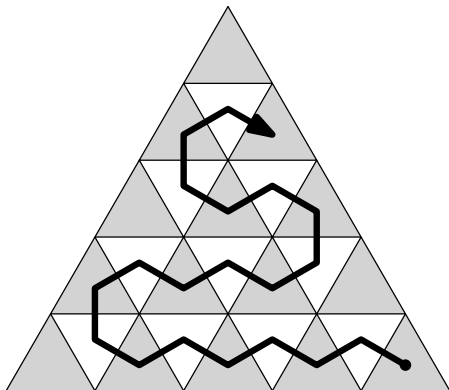


Треугольная доска



Жук ползает по треугольнику, разбитому на 25 треугольничков, переходя между соседними треугольничками. Какое наибольшее число треугольничков он может посетить, если ни в какой из них не заходит дважды?

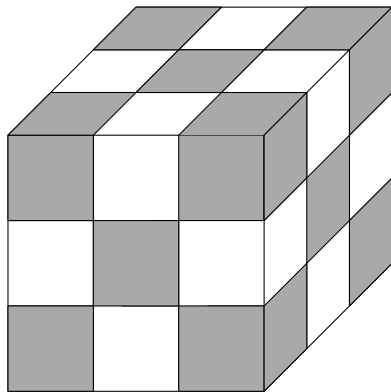
Решение из картинки: оценка + пример



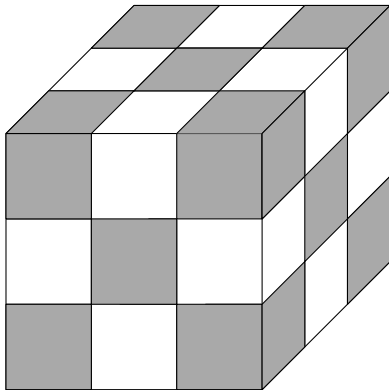
Задача про сыр

Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Шахматная 3D раскраска



Решение задачи про сыр



С учётом вырезанной центральной клетки серых кубиков на два больше, чем белых. При переходе через грань мышь меняет цвет кубика, поэтому в любом её маршруте количества серых и белых кубиков не могут отличаться более чем на один.

Покрытие трёхклеточными фигурками

Можно ли покрыть доску 6×6
одиннадцатью полосками из трёх клеток и
одним уголком из трёх клеток?

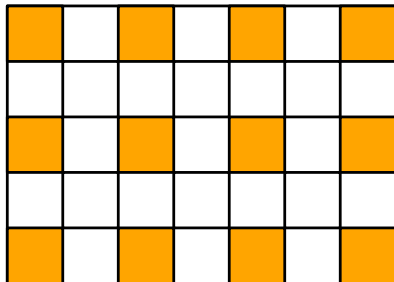
Цифры вместо цветов

1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3

Покрытие уголками

Можно ли покрыть доску 5×7 уголками из трёх клеток равномерно в несколько слоёв (каждая клетка должна быть покрыта одинаковым числом уголков)?

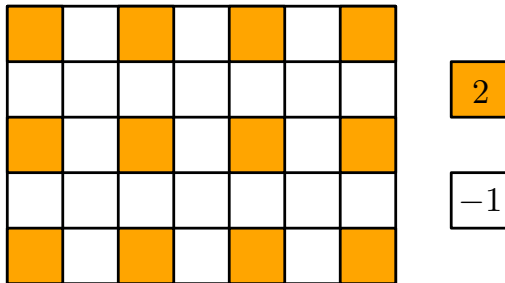
Очень хитрая расстановка



2

-1

Решение с помощью очень хитрой расстановки



Пусть есть покрытие в n слоёв. Сумма чисел в таблице равна $2 \cdot 12 - 23 = 1$, поэтому сумма чисел во всех уголках равна n . С другой стороны, сумма в каждом уголке равна 0 или -2 , поэтому сумма во всех уголках неположительна.

Противоречие.

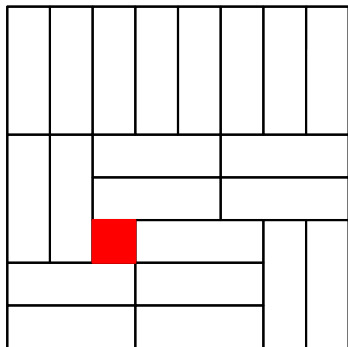
Задача для исследования

При каких m и n доску $m \times n$ можно покрыть уголками из трёх клеток равномерно в несколько слоёв?

Морской бой не по правилам

Миша и Коля сыграли в «Морской бой» по необычным правилам. Миша расставил 21 трёхпалубный корабль на доске 8×8 , а Коля сделал один выстрел и... промахнулся. В какую клетку он мог стрелять? Укажите все возможные варианты.

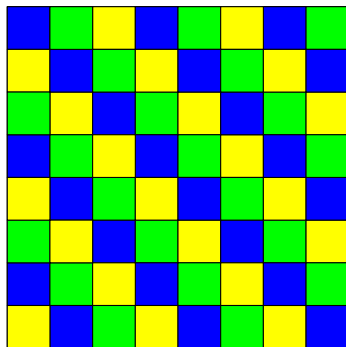
Морской бой: пример расстановки



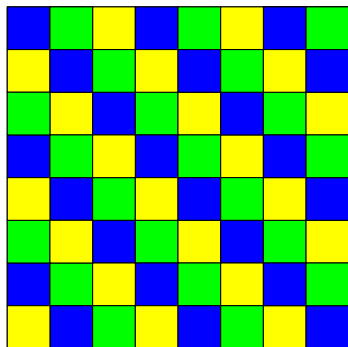
Ясно, что подходят поля с3, с6, f3, f6.

Морской бой: диагональная раскраска

Почему ни в какие другие поля, кроме с3, с6, f3, f6, Коля не мог стрелять?

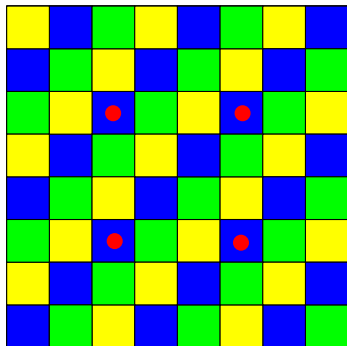
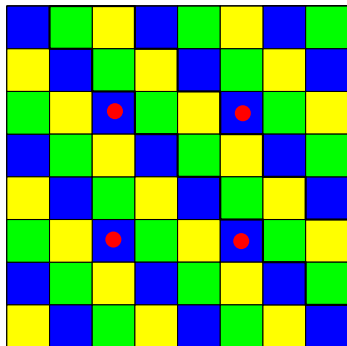


Морской бой: решение



Каждый 3-палубник занимает клетки всех трёх цветов. Синих клеток на одну больше, чем зелёных или жёлтых (это можно понять без подсчёта). Значит, выстрел был в синюю клетку.

Морской бой: решение



Отразим зеркально раскраску. На правой картинке выстрел тоже был в синюю клетку. Общие синие клетки на обеих картинках – это поля с3, с6, f3, f6.

Теорема Кастеляйна–Темперли–Фишера (1961).
Число способов покрыть доску $2m \times 2n$ доминошками из двух клеток равно

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n 4 \left(\cos^2 \frac{\pi i}{2m+1} + \cos^2 \frac{\pi j}{2n+1} \right).$$