

Примеры задач

Данный набор задач призван ознакомить учащегося с типами и сложностью задач на нашем кружке, чтобы не терять Ваше время. Если Вы не можете решить большинство из этих задач, то скорее всего наш кружок не подходит вам.

1. Найдите все многочлены $P(x)$, которые удовлетворяют равенству:

$$P(x) = \frac{P(x-1) + P(x+1)}{2}.$$

2. Внеписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке P , а продолжений сторон AB и AC — в точках Q и R соответственно. Докажите, что если середина PQ лежит на описанной окружности треугольника ABC , то и середина PR тоже лежит на этой описанной окружности.

3. На координатной плоскости рисуются всевозможные несамопересекающиеся ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, а звенья параллельны координатным осям. Обозначим через L_n число таких ломаных, выходящих из начала координат и имеющих длину n . Докажите, что $4 \cdot 2^n - 4 \leq L_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}$.

4. На сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 от соответственно. Докажите, что $AC_0 = CA_0$ тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B, B_1 лежат на одной окружности, где B_1 — середина дуги CBA описанной окружности $\triangle ABC$.

5. На сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно. Докажите, что $AC_0 + CA_0 = AC$ тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B, I лежат на одной окружности, где I — центр вписанной окружности $\triangle ABC$.

6. В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более, чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.

7. Каждый следующий член последовательности есть сумма квадратов цифр предыдущего. Докажите, что последовательность периодична.

8. При каких натуральных n выполнено $x^{2n} + x^n + 1 \div x^2 + x + 1$?

9. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

Докажите, что число $1 - ab$ является квадратом рационального числа.