Во всех задачах из сегодняшнего листка приведены доказательства заведомо абсурдных утверждений. Естественно, они содержат ошибки – но где именно?

16.1. Квадрат 8×8 разрезали на части и сложили из них прямоугольник размером 5×13 (рис. 1). Выходит, что $64 = 65$. **а)** Откуда взялась лишняя клетка? **б)** Для каких ещё чисел можно придумать похожий парадокс?

16.2. Рассмотрим квадратное уравнение: $x^2 + x + 1 = 0$. Число 0 не является корнем, поэтому можно разделить на x: $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$. Из исходного уравнения получаем, что $x + 1 = -x^2$, а из нового — что $x + 1 = -\frac{1}{x}$. Таким образом, $-x^2 = -\frac{1}{x}$, откуда $x^3 = 1$, следовательно, $x = 1$. Подставляем в исходное уравнение: $1^2 + 1 + 1 = 0$, то есть $3 = 0$. Где ошибка?

16.3. Рассмотрим такую задачу: *Пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Найдите все значения p и q, при которых $f(p) = f(q) = 0$.*

«Решение».

Поскольку p и q — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, по теореме Виета они должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2p \\ q(p-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0, q = 0 \\ p = 1, q = -2 \end{array} \right.$$

«Ответ»: $p = 0, q = 0$ или $p = 1, q = -2$.

Легко видеть, что найденные пары чисел p и q действительно удовлетворяют условию: $0^2 + 0 \cdot 0 + 0 = 0$, $1^2 + 1 \cdot 1 - 2 = 0$ и $(-2)^2 + 1 \cdot (-2) + (-2) = 0$. Однако под исходное условие подходит также пара чисел $p = -\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$. В самом деле, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Где же ошибка? Как так вышло, что мы потеряли это решение?

16.4. «Докажем», что все треугольники равнобедренные. В самом деле, рассмотрим произвольный треугольник ABC (см. рис. 2). Проведём в нём биссектрису угла B и серединный перпендикуляр к стороне AC. Если они параллельны, то это означает, что биссектриса совпала с высотой, и треугольник заведомо равнобедренный. В противном случае рассмотрим точку P, в которой они пересекаются. Опустим перпендикуляры PK и PL на стороны AB и BC. Так как BP — биссектриса, то $PK = PL$. Прямоугольные треугольники BPK и BPL равны по катету и гипотенузе, следовательно, $BK = BL$. С другой стороны, треугольник APC равнобедренный, так как его медиана совпадает с высотой, то есть $AP = PC$. А стало быть, прямоугольные треугольники APK и CPL тоже равны (по катету и гипотенузе). Таким образом, $AK = CL$. Таким образом, $AB = AK + BK = CL + BL = BC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

16.5. «Докажем» по индукции, что любые два натуральных числа равны между собой. Обозначим через A_n следующее утверждение: «Если a и b — два натуральных числа таких, что $\max(a, b) = n$, то $a = b$». Утверждение A_1, очевидно, верно, так как если $\max(a, b) = 1$, то $a = b = 1$, так что база индукции выполняется. Переход: предположим, что A_N верно. Пусть $\max(a, b) = N + 1$. Рассмотрим числа $\alpha = a - 1$, $\beta = b - 1$, тогда $\max(\alpha, \beta) = N$, таким образом, по предположению индукции $\alpha = \beta$. Но отсюда следует, что $a = b$, таким образом, утверждение A_{N+1} доказано. Где ошибка?

16.6. Классическое доказательство теоремы о сумме углов треугольника использует аксиому параллельных: «Через точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, параллельной данной». Ниже приведена попытка доказать эту теорему без использования аксиомы параллельных. Что не так с этим доказательством?

«Доказательство». В самом деле, обозначим эту сумму за S. Рассмотрим треугольник ABC и точку N на стороне AC (см. рис. 3).

Тогда
$$2S = \underbrace{\angle A + \angle ABN + \angle ANB}_{\text{сумма углов } \triangle ABN(=S)} + \underbrace{\angle BNC + \angle NBC + \angle C}_{\text{сумма углов } \triangle CBN(=S)} =$$
$$= \underbrace{\angle A + \angle ABC + \angle C}_{\text{сумма углов } \triangle ABC(=S)} + \underbrace{\angle ANB + \angle BNC}_{\text{сумма смежных углов } (=180^\circ)} = S + 180^\circ.$$

Выражая отсюда S, получаем, что $S = 180^\circ$ □

16.7. «Докажем», что любая окружность имеет два центра. Построим острый угол ABC (см. рис. 4). На сторонах его возьмем точки D и E и через них проведем перпендикуляры к сторонам угла. Пусть эти перпендикуляры пересекаются в точке F. Через три точки D, F и E проведем окружность. Эта окружность пересечет стороны угла в точках M и N. Отрезки MF и NF должны быть диаметрами построенной окружности, так как на них опираются вписанные в эту окружность прямые углы MDF и NEF. Середины отрезков MF и NF должны быть центрами построенной окружности. Следовательно, окружность имеет два центра. Где ошибка?

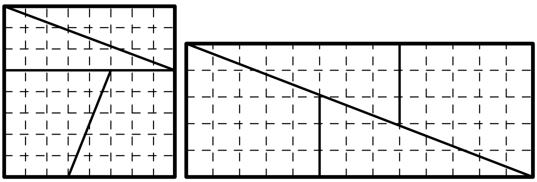

Рис. 1: Откуда взялась лишняя клетка?

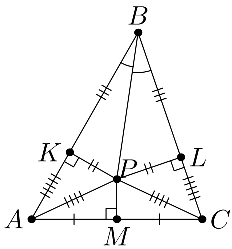

Рис. 2: Неужели все треугольники равнобедренные?

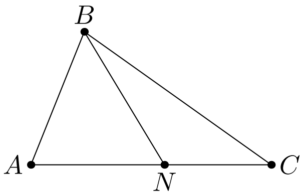

Рис. 3: Сумма углов треугольника.

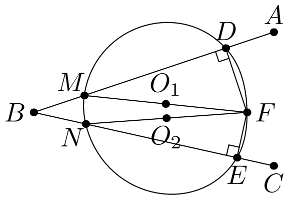

Рис. 4: У окружности два центра?