Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n. Основные свойства функции Эйлера:

- *Если p простое, то $\varphi(p) = p - 1$, а $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.*
- *Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$, то*
  $\varphi(n) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)\ldots\left(p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}\right) =$
  $= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$
- *Если НОД$(m, n) = 1$, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.*

15.1. Чему равна сумма

$$\varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \ldots + \varphi(p^\alpha),$$

где p — простое число, а α — натуральное число?

15.2. Решите уравнения:
а) $\varphi(x) = 2$, **б)** $\varphi(x) = 8$, **в)** $\varphi(x) = 12$, **г)** $\varphi(x) = 14$.

15.3. Для каких n возможны равенства:
а) $\varphi(n) = n - 1$, **б)** $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$, **в)** $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$?

15.4. Известно, что НОД$(m, n) > 1$. Что больше: $\varphi(mn)$ или $\varphi(m)\varphi(n)$?

15.5. **а)** Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n — чётно.
б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

15.6. **а)** Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем d?
б) Докажите равенство: $\sum\limits_{n \,\vdots\, d} \varphi(d) = n$.