

Последовательность Фибоначчи называется последовательность φ_n , в которой первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих: $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$. Первые 10 чисел Фибоначчи равны 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Иногда удобно рассматривать число Фибоначчи с нулевым номером ($\varphi_0 = 0$). Легко видеть, что рекуррентное соотношение $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$ при таком определении продолжает выполняться ($\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0$, $1 = 1 + 0$).

4.1. Сколькими способами можно разрезать полосу размером $2 \times n$ на «доминишки» (т.е. прямоугольники размером 1×2)?

4.2. а) Докажите с помощью математической индукции, что для всех натуральных n выполнено соотношение:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \dots + \varphi_n^2 = \varphi_n \varphi_{n+1} \quad (1)$$

б) Укажите геометрический смысл соотношения (1).

4.3. Докажите следующие соотношения:

а) $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \varphi_{n+2} - 1$;

б) $\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 + \dots + \varphi_{2n-1} = \varphi_{2n}$;

в) $\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_6 + \dots + \varphi_{2n} = \varphi_{2n+1} - 1$.

4.4. Докажите тождество Кассини: $\varphi_{n+1}\varphi_{n-1} - \varphi_n^2 = (-1)^n$.

4.5. Вычислите сумму: $\sum_{k=2}^n \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}$.

4.6. Докажите с помощью математической индукции, что для всех натуральных m и n выполнено соотношение:

$$\varphi_{m+n} = \varphi_m \varphi_{n-1} + \varphi_{m+1} \varphi_n \quad (2)$$

4.7. Докажите равенства: а) $\varphi_{n+1}^2 - \varphi_{n-1}^2 = \varphi_{2n}$; б) $\varphi_n^2 + \varphi_{n+1}^2 = \varphi_{2n+1}$;

в) $\varphi_{n+1}^3 + \varphi_n^3 - \varphi_{n-1}^3 = \varphi_{3n}$. Указание: воспользуйтесь соотношением (2).

4.8. На лестнице 10 ступенек. За один шаг можно подняться на одну ступеньку, либо перепрыгнуть через ступеньку. Сколько существует различных способов подняться по лестнице с первой ступеньки на 10-ю?

4.9. Докажите соотношение (2), не используя индукцию (указание: воспользуйтесь задачей 4.8).

4.10. Докажите с помощью математической индукции формулу Бине:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

4.11. Используя метод рекуррентных соотношений, выведите явную формулу для последовательности $\{a_n\}$, заданной начальными условиями $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.