

Числа Фибоначчи

1. Основные сведения

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность φ_n , в которой первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 = 1, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \varphi_{n-1}, \text{ если } n > 2.\end{aligned}\tag{1}$$

Первые 10 чисел Фибоначчи равны 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Последовательность Фибоначчи обладает множеством интересных свойств и появляется в качестве ответа во многих задачах.

С числами Фибоначчи можно столкнуться и за пределами математики — например, эта последовательность упоминается в известной книге Дэна Брауна «Код да Винчи». Кроме того, если приехать на станцию московского метро «Ломоносовский проспект», можно обнаружить, что ряды цифр, которыми украшены её стены, являются фрагментами последовательности Фибоначчи.

2. Примеры задач

Поскольку элементы последовательности Фибоначчи в силу своего определения выражаются через предыдущие, утверждения, в которых они встречаются, удобно доказывать по индукции. Рассмотрим для примера такую задачу.

Задача 1. *Некий преподаватель в течение года должен поставить n оценок. При этом он ставит только двойки и пятёрки, а чтобы не показаться злым, никогда не ставит две двойки подряд. Сколькими способами он может поставить оценки?*

Обозначим это количество способов через $f(n)$. Посмотрим на самую первую оценку. Если это «5», то остальные $n - 1$ оценок можно ставить как угодно в соответствии с условием задачи, что даёт нам $f(n - 1)$ вариантов. А если это «2», то следующей оценкой по условию обязательно будет «5», а оставшиеся $n - 2$ оценки можно поставить $f(n - 2)$ способами.

Таким образом получается, что $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$. Осталось заметить, что $f(1) = 2 = \varphi_3$, а $f(2) = 3 = \varphi_4$ и по индукции получить ответ: $f(n) = \varphi_{n+2}$.

3. Явная формула

Формула (1) называется *рекуррентной*, поскольку выражает следующее число Фибоначчи через предыдущие. Хотелось бы получить *явную* формулу, которая позволила бы выразить n -ое число Фибоначчи непосредственно через n . Такая формула

действительно существует и называется формулой Бине:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (2)$$

Формулу Бине можно доказать по индукции (проделайте это!), но возникает справедливый вопрос — а как до этого догадаться? Попробуем вывести эту формулу, не зная её заранее.

3.1. Рекуррентные соотношения

Забудем на время про условие $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ и будем рассматривать все последовательности f_n , удовлетворяющие соотношению $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Легко видеть (проверьте!), что если последовательности f_n и g_n удовлетворяют данному соотношению, то для последовательности $h_n = af_n + bg_n$ (где a и b — какие-то числа, не зависящие от n) это тоже верно. А теперь будем искать последовательность вида $f_n = \lambda^n$, где $\lambda \neq 0$, причём так, чтобы выполнялось наше рекуррентное соотношение:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \iff \lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Полученное уравнение на λ называется *характеристическим уравнением* данного рекуррентного соотношения. У этого уравнения есть два корня, которые часто обозначают буквами φ и $\hat{\varphi}$:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, последовательности $f_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ и $\hat{f}_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению для чисел Фибоначчи. А теперь будем искать формулу для чисел Фибоначчи в виде $\varphi_n = af_n + b\hat{f}_n$. Для этого нужно подобрать a и b так, чтобы выполнялись начальные условия¹: $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = 1$. Отсюда получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставляя полученные a и b , а также выражения для f_n и $\hat{f}_n$ в соотношение $\varphi_n = af_n + b\hat{f}_n$, получаем формулу (2). $\square$

¹Здесь удобно рассмотреть число Фибоначчи с нулевым номером. Легко видеть, что если положить $\varphi_0 = 0$, то рекуррентное соотношение продолжит выполняться: $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0$. Можно было бы взять в качестве начального условия и $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, просто тогда система уравнений стала бы более громоздкой.

Может показаться удивительным, что мы почему-то стали искать нужную нам последовательность именно в виде суммы двух известных нам последовательностей, а ещё более удивительным то, что такая последовательность нашлась. Чтобы получить представление о том, почему нам так «повезло», можно провести аналогию с векторами на плоскости. Как мы уже отмечали выше, последовательности, заданные рекуррентным соотношением, можно складывать и умножать на число, рекуррентное соотношение от этого не перестаёт быть верным. Можно рассматривать множество всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению, как множество векторов на плоскости, а сами последовательности — как отдельные векторы². Как известно, два неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис, любой вектор единственным образом представляется в виде линейной комбинации базисных векторов. В нашем случае роль базисных векторов играют последовательности (f_n) и $(\hat{f}_n)$, а коэффициенты a и b — это координаты последовательности (φ_n) в этом базисе. Почему в базисе именно два вектора? Дело в том, что наша последовательность однозначно задаётся двумя числами — своими первыми двумя элементами, поэтому было бы странно предполагать, что пространство последовательностей, удовлетворяющих нашему рекуррентному соотношению, имеет бóльшую размерность.

Можно также задаться вопросом, почему для нахождения базиса мы изначально стали рассматривать именно геометрическую прогрессию, а например, не арифметическую или вообще какую-то другую последовательность. Самый простой ответ — потому, что для изученных нами прогрессий мы уже знаем явную формулу, поэтому их линейная комбинация даст нам явную формулу для искомой последовательности. А арифметической прогрессии, удовлетворяющей рекуррентному соотношению, не существует (проверьте!), поэтому остаётся рассматривать геометрическую. Есть и другое объяснение, но оно потребовало бы экскурса в линейную алгебру, поэтому не будем на нём останавливаться.

Также стоит отметить, что если бы рекуррентное соотношение было произвольным, нам могло бы немного не повезти. Во-первых, у характеристического уравнения могло бы не оказаться действительных корней. Например, для соотношения $f_{n+1} = f_n - f_{n-1}$ характеристическое уравнение выглядит так: $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, его дискриминант равен -3 . Как мы увидим в следующем семестре, это не проблема: просто в явной формуле будут присутствовать комплексные числа в промежуточных выкладках. Другая проблема возникает в случае, если характеристическое уравнение имеет кратные корни, например, характеристическое уравнение соотношения $f_{n+1} = 6f_n - 9f_{n-1}$ имеет вид $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Это уравнение имеет лишь один корень $\lambda = 3$ кратности 2 , так как его дискриминант равен 0 . Таким образом, последовательность $\{3^n\}$ будет удовлетворять рекуррентному соотношению, но это лишь один базисный вектор, и неочевидно, где брать второй. Можно показать, что в этом случае в качестве второго базисного вектора подошла бы последовательность $\{n \cdot 3^n\}$, то есть искомую последовательность можно было бы искать в виде $f_n = (a + bn) \cdot 3^n$.

²Есть даже понятие абстрактного векторного пространства, с помощью которого можно придать строгость этому рассуждению. Впрочем, пока нам достаточно интуитивного представления.

3.2. Производящая функция

Мехмат МГУ, первый курс, семинар по высшей алгебре. Тема занятия — кольца³.

Преподаватель: «Приведите пример кольца! Ну, из детства, вспомните!»

Студент-первокурсник за первой партой: «Формальные степенные ряды!»

Преподаватель: «Тяжёлое у вас было детство...»

Реальная история

Другой способ вывести формулу Бине заключается в том, чтобы рассмотреть бесконечную сумму:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \dots + \varphi_n x^n + \dots$$

Определённое таким образом выражение $s(x)$ называется *производящей функцией* последовательности φ_n . Вообще говоря, работа с бесконечными суммами требует определённой аккуратности — наивные действия с подобными выражениями могут иногда привести к неверным результатам. Но сейчас нас интересует не столько строгое доказательство формулы, сколько способ её получить, не зная заранее — в конце концов, строго доказать потом можно и по индукции! Впрочем, описанным ниже рассуждениям можно придать строгий смысл, и несколько слов об этом мы чуть позже всё-таки скажем.

Запишем, чему равны выражения для $s(x)$, а также $xs(x)$ и $x^2s(x)$:

$$\begin{array}{rcl} s(x) & = & x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots + \varphi_n x^n + \dots \\ xs(x) & = & x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \dots + \varphi_{n-1} x^n + \dots \\ x^2s(x) & = & + x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \dots + \varphi_{n-2} x^n + \dots \end{array}$$

Если внимательно посмотреть на эти три выражения, записанные друг под другом, можно заметить, что каждое слагаемое в верхней строке (кроме самого первого) равно сумме соответствующих слагаемых в двух нижних. Это следует из рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи. Это позволяет записать такое равенство:

$$s(x) = x + xs(x) + x^2s(x)$$

³Кольцом называют множество, элементы которого можно складывать, вычитать и умножать, при этом должны выполняться некоторые разумные свойства (точный список свойств можно прочитать в любом учебнике по высшей алгебре).

Выражая отсюда $s(x)$, получим:

$$s(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}.$$

Снова вспомним наши обозначения: $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Легко видеть, что корнями квадратного трёхчлена в знаменателе выражения для $s(x)$ являются $-\varphi$ и $-\hat{\varphi}$. Также нетрудно проверить следующие соотношения: $\varphi + \hat{\varphi} = 1$, $\varphi - \hat{\varphi} = \sqrt{5}$, $\varphi\hat{\varphi} = -1$.

Преобразуем выражение для $s(x)$:

$$s(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1} = \frac{-x}{(x + \varphi)(x + \hat{\varphi})} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\hat{\varphi}}{x + \hat{\varphi}} - \frac{\varphi}{x + \varphi} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \hat{\varphi} x} \right).$$

Для последнего преобразования нам понадобится такое соотношение:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad (3)$$

Чтобы понять откуда оно берётся, домножим бесконечную сумму, стоящую в правой части, на знаменатель левой части и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} (1-t)(1+t+t^2+t^3+\dots) &= (1+t+t^2+t^3+\dots) - t(1+t+t^2+t^3+\dots) = \\ &= 1 + t + t^2 + t^3 + \dots - \\ &\quad - t - t^2 - t^3 - \dots = 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что все слагаемые кроме самого первого, которое равно 1, уничтожаются.

Пользуясь соотношением (3), продолжим преобразование выражения:

$$s(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\hat{\varphi} x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}^n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \hat{\varphi}^n) x^n.$$

Вспоминая, что $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^n$ и приравнявая коэффициенты при x^n , получаем, что $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \hat{\varphi}^n)$, а это и есть формула Бине.

Замечание. Внимательный читатель может обратить внимание, что в одной из сумм индексы идут с единицы, а в другой — с нуля. На самом деле это не важно: легко видеть, что слагаемое с нулевым номером будет равно нулю.

Как уже отмечалось, приведённое выше рассуждение нельзя считать строгим, не произнеся для этого дополнительных слов. Во-первых, нужно определить, что мы понимаем под бесконечной суммой. Если этого не сделать, можно легко прийти к противоречию. Классическим примером неверного рассуждения является, например, такое: рассмотрим знакопеременную сумму $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$. На первый

взгляд, $s = 0$, в самом деле, ведь $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$. Но с другой стороны, поставив скобки иначе, получим $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$. Группируя таким образом скобки, можно вообще любое число получить! Ясно, что понятие бесконечной суммы нуждается в уточнении.

В случае со степенными рядами, то есть суммами вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ возможны два различных подхода. Первый подход используется в математическом анализе. Там рассматриваются частичные суммы $s_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, а сумма ряда определяется как предел последовательности s_n : грубо говоря, это такое число s , к которому «бесконечно приближаются» значения s_n с ростом n . Однако имея свои преимущества, такой подход не лишён и недостатков. Во-первых, для этого надо дать аккуратное определение предела последовательности (это делается в курсе математического анализа). Во-вторых, далеко не у любого ряда можно определить сумму таким способом. Те ряды, для которых этого можно сделать, называются сходящимися (а те, для которых нельзя — расходящимися⁴). Например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, который мы рассматривали в доказательстве формулы Бине, сходится только при $|t| < 1$, и в этом случае предел его частичных сумм действительно равен $\frac{1}{1-t}$. В третьих, в некоторых случаях даже сходимости ряда может оказаться недостаточно: так, например, для того, чтобы сумма ряда не зависела от перестановки слагаемых, может потребоваться так называемая абсолютная сходимость, то есть сходимость ряда из абсолютных величин слагаемых. Наконец, при таком подходе переход от равенства сумм двух рядов к равенству их коэффициентов потребует дополнительных обоснований. В самом деле, вдруг какие-то два ряда $\sum_{a=0}^{\infty} a_k x^k$ и $\sum_{b=0}^{\infty} b_k x^k$ при каких-то ненулевых x численно совпадают, а какие-то из коэффициентов a_k и b_k у них отличаются? В действительности оказывается, что если ряды совпадают численно не в конечном наборе точек, а на некотором интервале (а в нашем случае это будет именно так), то совпадение доказать можно, но это, как минимум, не очевидно. Из всего этого видно, что использование этого подхода для обоснования нашего доказательства связано с определёнными трудностями, хотя в принципе и возможно.

Второй подход, принятый в алгебре, заключается в том, чтобы рассматривать так называемые *формальные степенные ряды*. Вместо того, чтобы подставлять в качестве x какое-то число и выяснять, при каких x этот ряд сходится, мы рассматриваем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ просто как формальное выражение. По сути, определённый таким способом ряд — это просто упорядоченный набор его коэффициентов. Мы могли бы даже записывать его не как $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$, а как $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. При таком подходе сумма двух рядов с коэффициентами $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ и $(b_0, b_1, b_2, b_3, \dots)$

⁴Мы уже сталкивались с примером расходящегося ряда — это гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. На занятии, посвящённом индукции, мы доказывали, что эта сумма может быть сколь угодно большой.

определяется как ряд с коэффициентами $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$, а произведение — как ряд с коэффициентами $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0, \dots, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \dots)$. Коэффициенты произведения вычислены по правилам раскрытия скобок, но для формальных степенных рядов они являются именно *определением* произведения. Поскольку теперь это уже не функции, у которых вычисляются числовые значения, а абстрактные последовательности коэффициентов, привычные свойства сложения и умножения при таком подходе необходимо доказывать — попробуйте доказать, например, ассоциативность умножения. При этом выражения в приведённых выше выкладках следует воспринимать не как числа, а как специальные объекты — бесконечные наборы коэффициентов, действия с которыми выполняются в соответствии с нашими правилами. Например, в равенстве $s(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}$ числитель правой части — это формальный степенной ряд $0 + (-1) \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$, а знаменатель — формальный степенной ряд $-1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots$. Чтобы корректно работать с делением, нужно научиться находить обратный элемент к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — такой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, что их произведение даёт единицу (то есть ряд $1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$). Несложно доказать, что обратный элемент существует для тех рядов, для которых $a_0 \neq 0$ (и только для них). Если аккуратно проделать все эти выкладки, то доказательство формулы Бине через производящую функцию станет вполне строгим.

3.3. Золотое сечение.

Число $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ называется *числом Фидия* или *золотым сечением*. Оно тесно связано с числами Фибоначчи — например, отношение φ_{n+1}/φ_n стремится к этому числу при $n \rightarrow \infty$. Не следует путать обозначение числа Фидия (φ) с обозначением чисел Фибоначчи (φ_n): в отличие от последних, у него нет нижнего индекса, задающего номер. Золотое сечение часто называют «красивым» числом в том смысле, что задаваемые им пропорции «приятны глазу». Из-за этого данное соотношение часто используется в искусстве. Математически это формализовать сложно, но можно привести, скажем, такой пример:

Задача 2. Прямоугольный лист бумаги разрезали по прямой на квадрат и прямоугольник меньшего размера. Оказалось, что маленький прямоугольник подобен исходному. Чему равно отношение сторон прямоугольника?

Решение. Введём обозначения для длин отрезков, как показано на рисунке 1. Из условия следует соотношение $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Перемножив пропорцию крест-накрест и перенеся слагаемые в другую часть, получим уравнение $a^2 - ab - b^2 = 0$. Если разделить

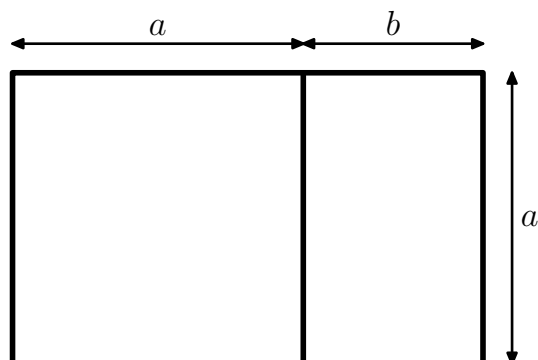


Рис. 1. Геометрический смысл золотого сечения.

обе части на b^2 , получается уже знакомое нам уравнение на $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Из двух его корней φ и $\hat{\varphi}$ нам подходит только φ , так как $\hat{\varphi} < 0$. Таким образом, соотношение сторон обоих прямоугольников равно $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. $\square$

Дополнительная литература

- Спивак А.В. Энциклопедия «Числа и фигуры»: <http://www.kvant.info/panov/enciklop.pdf>
- Алфутова Н.Б. Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. М.:МЦНМО, 2005
- Канунников А.Л. Видеолекции малого мехмата для 9–11 классов за 2021–2022 учебный год: <https://teach-in.ru/course/little-mehmat-9-11>