

2.1. Три числа, не равных нулю, образуют арифметическую прогрессию, а их квадраты, взятые в том же порядке — геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

2.2. Найдите сумму

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

2.3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^n k^2 2^k = 1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + n^2 \cdot 2^n$.

2.4. Найдите сумму $\sum_{k=1}^n \underbrace{11 \dots 1}_k = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_n$.

2.5. Найдите суммы: а) $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$ б) $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k!$

2.6. Найдите сумму $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2$.

2.7. Даны три вертикальных стержня, на первый из них надеты n дисков различного диаметра, образующие пирамиду (внизу лежит диск наибольшего диаметра,верху — наименьшего). За одно действие разрешается переместить один лежащий сверху диск с одного стержня на другой, при этом нельзя класть больший диск на меньший. Какое наименьшее количество действий требуется, чтобы переместить всю пирамиду с первого стержня на третий, если задано одно из дополнительных требований:

а) нельзя перемещать диск напрямую с первого диска на третий и обратно (каждое переключивание должно производиться через второй стержень),

б) самый маленький диск нельзя класть на второй стержень?

2.8. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = \sum_{k=1}^m a_k \cdot k! = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_m \cdot m!$$

где $0 \leq a_k \leq k$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$ и $a_m \neq 0$.