Суммы и прогрессии

1. Арифметическая и геометрическая прогрессия

Напомним, что *арифметической прогрессией* с разностью d называется последовательность (a_n), заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$ и фиксированным начальным значением a_0. Несложно написать и явную формулу для элемента этой последовательности: $a_n = a_0 + nd$. Отсюда также несложно вывести формулу для частичной суммы арифметической прогрессии, то есть для суммы её первых N элементов:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd) = (n+1)a_0 + d\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)a_0 + d\frac{n(n+1)}{2},$$

Заметим, что если бы элементы нумеровались не с нуля, а с единицы, формулы общего члена и суммы прогрессии получились бы немного другими. В разных задачах могут встретиться разные нумерации, поэтому вместо запоминания итоговой формулы и последующей подстановки в неё конкретных значений лучше понять, откуда она берётся, и каждый раз выводить эту формулу заново, используя выкладки наподобие вышеприведённых. Времени на вывод будет потрачено не так много (если понимать идею, можно вывести эту формулу в уме прямо во время её написания), а наделать ошибок с индексами становится заметно сложнее[1]. Для того, чтобы ещё сильнее уменьшить вероятность допустить ошибку, полезно проверять и окончательные, и промежуточные формулы при малых значениях n. Например, вышеприведённую формулу легко проверить при $n = 0$ и $n = 1$.

Несложно убедиться, что каждый[2] элемент a_n арифметической прогрессии равен среднему арифметическому $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ своих соседей, что может в какой-то степени оправдывать название данной последовательности.

Геометрическая прогрессия (b_n) с ненулевым знаменателем q задаётся рекуррентным соотношением $b_{n+1} = qb_n$ и начальным значением b_0. В явном виде элемент геометрической прогрессии задаётся формулой $b_n = b_0 q^n$, а её частичная сумма равна

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_0 q^k = b_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = b_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Формулу для суммы геометрической прогрессии легко проверить непосредственным раскрытием скобок:
$(q-1)(q^n + q^{n-1} + \ldots + q^2 + q + 1) = q^{n+1} + \cancel{q^n} + \ldots + \cancel{q^3} + \cancel{q^2} + \cancel{q} - \cancel{q^n} - \cancel{q^{n-1}} - \ldots - \cancel{q^2} - \cancel{q} - 1 = q^{n+1} - 1.$
Также стоит заметить, что эта формула не работает при $q = 1$, в этом случае все b_k равны b_0 и

[1] Кроме того, формула со временем забудется, а вот идея её вывода — вряд ли.

[2] Кроме самого первого элемента a_0, у которого нет соседей. Впрочем, при желании можно доопределить нашу последовательность и в обратную сторону, задав элементы $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ таким образом, чтобы выполнялось рекуррентное соотношение. Легко видеть, что и явная формула останется такой же.

частичная сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ будет равна $(n+1)b_0$. В некоторых учебниках такой вырожденный случай вообще не считают геометрической прогрессией.

Кроме того, легко заметить, что каждый элемент геометрической прогрессии равен среднему геометрическому своих соседей (возможно, с обратным знаком, если среди элементов последовательности есть отрицательные): $|b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$.

2. Ханойские башни и арифметико-геометрическая прогрессия

Арифметико-геометрическая прогрессия – это последовательность (c_n), задаваемая рекуррентной формулой $c_{n+1} = qc_n + d$. Числа d и q назваются разностью и знаменателем прогрессии соответственно. Естественно, интерес представляет только невырожденный случай, когда $d, q \neq 0, q \neq 1$. В отличие от арифметической и геометрической прогрессии, здесь уже не так очевидно, как выразить элемент последовательности в явном виде через n, не вычисляя предыдущие элементы. Прежде чем вывести эту формулу в общем виде, рассмотрим задачу, в которой появляется подобная последовательность.

Задача 1 (о Ханойских башнях)**.** *Даны три вертикальных стержня, на один из них надеты n дисков различного диаметра, образующие пирамиду (внизу лежит диск наибольшего диаметра, вверху — наименьшего). За одно действие разрешается переместить один лежащий сверху диск с любого стержня на любой другой, при этом нельзя класть больший диск на меньший. Какое наименьшее количество действий требуется, чтобы переместить всю пирамиду на другой стержень (рис. 1)?*

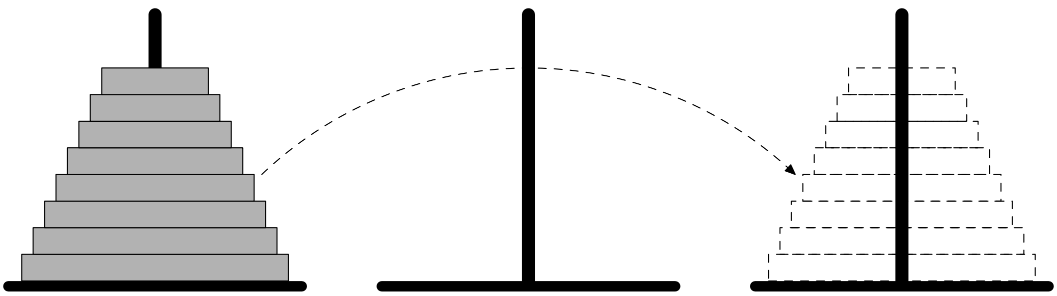

Рис. 1. Ханойские башни: постановка задачи.

Решение. Обозначим через c_n искомое количество способов. В какой-то момент придётся перемещать самый большой диск. Это можно сделать только если все остальные диски сложены в виде пирамиды на другом стержне, а для такого перемещения требуется c_{n-1} действий (рис. 2). Ещё одно действие требуется для того, чтобы переместить

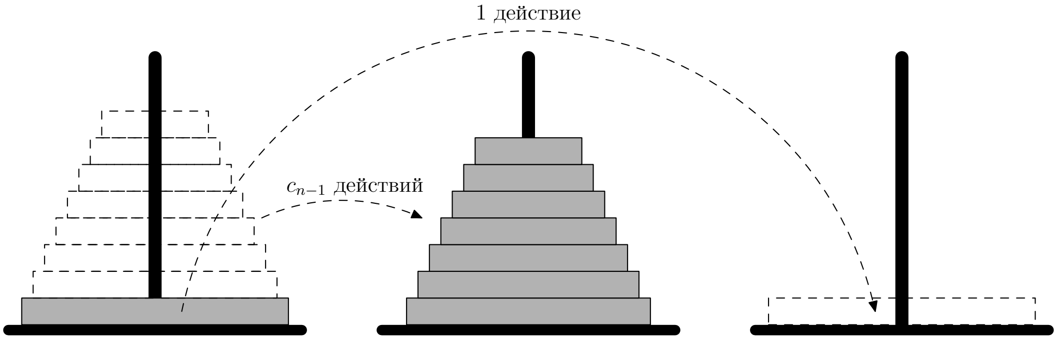

Рис. 2. Ханойские башни: перенос всех дисков кроме нижнего на вспомогательный стержень (c_{n-1} действий) и перенос нижнего диска на требуемый стержень (1 действие).

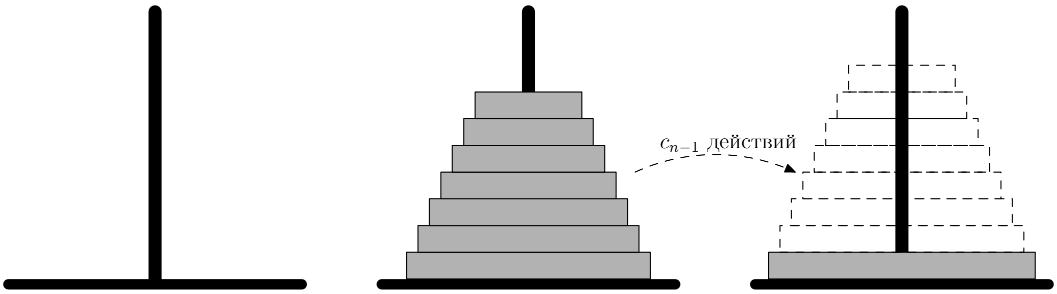

Рис. 3. Ханойские башни: перенос всех дисков кроме нижнего со свободного стержня на нижний диск.

сам нижний диск, и ещё c_{n-1} действий требуется для перемещения на него оставшихся дисков (рис. 3).

Следовательно, имеет место рекуррентное соотношение: $c_n = 2c_{n-1} + 1$. Ясно, что $c_1 = 1$, так как если диск всего один, его можно переместить за одно действие. Попробуем выписать несколько первых значений этой последовательности:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
c_n	1	3	7	15	31	63	127	255

Здесь уже можно увидеть закономерность и добавить в таблицу дополнительную строку, элементы которой образуют уже знакомую нам геометрическую прогрессию:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
c_n	1	3	7	15	31	63	127	255
$c_n + 1$	2	4	8	16	32	64	128	256

Это наблюдение, конечно, ещё не доказательство, но легко убедиться, что так будет происходить при любых n. В самом деле, из рекуррентного соотношения для c_n следует, что $c_n+1=(2c_{n-1}+1)+1=2(c_{n-1}+1)$. Таким образом, числа c_n+1 действительно образуют геометрическую прогрессию, и $c_n+1=2^n$, следовательно, $c_n=2^n-1$.

□

Вернёмся теперь к общему случаю арифметико-геометрической прогрессии. Как вывести явную формулу для последовательности (c_n), удовлетворяющей соотношению $c_{n+1}=qc_n+d$ при $n\geqslant 0$? Попробуем действовать так же, как и в задаче о ханойских башнях. А именно, попробуем подобрать такую константу C, чтобы последовательность (c_n+C) была геометрической прогрессией со знаменателем q, то есть чтобы было выполнено соотношение:

$$c_{n+1}+C=q(c_n+C).$$

Преобразуем левую часть этого равенства:

$$c_{n+1}+C=(qc_n+d)+C=q(c_n+\frac{C+d}{q}).$$

Таким образом, нам необходимо и достаточно, чтобы $C=\frac{C+d}{q}$, то есть $C=\frac{d}{q-1}$. Итак, $(c_n+\frac{d}{q-1})$ — геометрическая прогрессия с разностью q и начальным элементом $c_0+\frac{d}{q-1}$, следовательно, $c_n+\frac{d}{q-1}=(c_0+\frac{d}{q-1})q^n$, а значит, $c_n=(c_0+\frac{d}{q-1})q^n-\frac{d}{q-1}=c_0q^n+d\frac{(q^n-1)}{q-1}$.

3. Другие подходы к вычислению сумм

В прошлый раз мы рассматривали метод суммирования, который подходит для вычисления сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n}k^m$. Попробуем вычислить ещё несколько сумм, используя другие подходы.

3.1. Все слагаемые уничтожаются

Как вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$? Заметим, что выполняется соотношение: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Подставим это в исходную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Как видим, после подстановки уничтожились все слагаемые кроме первого и последнего, что позволило легко получить ответ.

3.2. Дискретное преобразование Абеля

Как вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + n \cdot 2^n$? Если бы перед 2^k не было бы «мешающего» множителя k, у нас получилась бы геометрическая прогрессия, сумму которой мы уже умеем вычислять: $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$.

Обратите внимание на свободный член: значение равно именно $2^{n+1} - 2$, а не $2^{n+1} - 1$, так как суммирование начинается с $k = 0$, а не $k = 1$. Из-за смещённого индекса из общей суммы $2^{n+1} - 1$ вычтется элемент $2^0 = 1$, откуда и получится $2^{n+1} - 2$. При отсутствии должной внимательности здесь очень легко допустить ошибку!

Можно и не пользоваться формулой для геометрической прогрессии, а рассуждать так: возьмём сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k$, прибавим к ней слева 2 и будем «сворачивать» сумму по одному слагаемому, пользуясь соотношением $2^k + 2^k = 2^{k+1}$:

$2 + \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = \overbrace{\overbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2+2}_{4}+4}_{8}+8}_{16}+\ldots+2^{k-2}}^{2^{k-1}}+2^{k-1}}^{2^k}+2^k = 2^{k+1}$. Примерно так сворачиваются числа в популярной на смартфонах игре «2048».

Для того, чтобы вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$, представим 2^k в виде $2^{k+1} - 2^k$:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + n \cdot 2^n = 1 \cdot (2^2 - 2^1) + 2 \cdot (2^3 - 2^2) + 3 \cdot (2^4 - 2^3) + \ldots \\
+ (n-1)(2^n - 2^{n-1}) + n(2^{n+1} - 2^n) = (*)
\end{aligned}
$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые так, чтобы за скобку выносились не коэффициенты при 2^k, а сами степени двойки:

$$
\begin{aligned}
(*) &= 1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + \ldots + (n-1)2^n - (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^{n+1} - n \cdot 2^n = \\
&= -1 \cdot 2^1 + (\underbrace{1-2}_{=-1}) \cdot 2^2 + (\underbrace{2-3}_{=-1}) \cdot 2^3 + (\underbrace{3-4}_{=-1}) \cdot 2^4 + \ldots + \big(\underbrace{(n-2)-(n-1)}_{=-1}\big)2^{n-1} + \big(\underbrace{(n-1)-n}_{=-1}\big)2^n + n \cdot 2^{n+1} = \\
&= n \cdot 2^{n+1} - 2 - \big(\underbrace{2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n}_{=2^{n+1}-1-2^0-2^1=2^{n+1}-4}\big) = n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2.
\end{aligned}
$$

Использованный выше приём с перегруппировкой слагаемых называется *дискретным преобразованием Абеля* и в общем случае выглядит примерно так:

$$
\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) b_k
$$

Как и в случае с формулами для арифметической и геометрической прогрессии, общий вид формулы сильно зависит от обозначений и нумерации индексов. Поэтому для того, чтобы не запутаться, проще всего каждый раз выводить формулу заново. В самом деле, как вывести вышеприведённую формулу для $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k)$? Идею мы помним: нужно раскрыть скобки и перегруппировать так, чтобы за скобкой было именно b_k, а не a_k. Крайним слагаемым, как мы помним, пары не хватит: $a_n b_{n+1} - a_0 b_0$. Остаётся сумма вида $\sum\limits_{s=?}^{?} b_s(a_? - a_?)$ (для большей ясности в правой части обозначим переменную суммирования отличной от k буквой s.). Откуда у нас в исходной сумме $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k)$ может получиться b_s? Либо из слагаемого $a_k b_{k+1}$ при $k = s - 1$, либо из слагаемого $-a_k b_k$ при $k = s$. Таким образом, сумма у нас будет такая: $\sum\limits_{s=?}^{?} b_s(a_{s-1} - a_s)$, а тут уже и пределы суммирования легко написать: s будет меняться от единицы (так как иначе индекс $s - 1$ не имеет смысла) и до n, так как всего слагаемых на одно меньше, чем в левой части. Итого, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = a_n b_{n+1} - a_0 b_0 + \sum\limits_{s=1}^{n} (a_{s-1} - a_s) b_s$.

Для читателей, знакомых с интегралами, отметим, что преобразование Абеля является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям: $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_{x_1}^{x^2} - \int_{x_1}^{x^2} g(x)df(x)$

Упражнения для самостоятельного решения

- Как изменится ответ в задаче о ханойских башнях, если запретить перекладывания между с первого стержня на третий и обратно? А если вместо этого запретить помещать самый маленький диск на второй стержень?
- Используя преобразование Абеля, вычислите, чему равна сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k$.

Версия файла: a2025-7-g0673f1a
Дата сборки: Вс 12 окт 2025 21:52:28 MSK