

1.1. Докажите, что для любого натурального числа n имеет место следующее равенство: $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. В чём геометрический смысл этого соотношения?

Числа $T_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ называются *треугольными*.

1.2. Докажите равенства и укажите их геометрический смысл:

а) $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$; б) $T_{m+n} = T_n + T_m + mn$.

1.3. Обозначим $\mathcal{X}_n$ количество точек в составленном из точек правильном шестиугольнике, одна сторона которого содержит n точек (на рисунке 1 показаны такие шестиугольники для n равного 1, 2 и 3). Такие числа называются *гексами*. Докажите следующие свойства этих чисел:

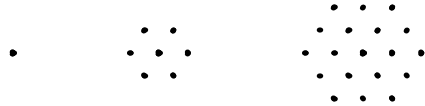


Рис. 1: Гексы

а) $\mathcal{X}_n = 6T_{n-1} + 1$; б) $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \dots + \mathcal{X}_n = n^3$.

В чём геометрический смысл этих соотношений?

1.4. Суммируя выражение $k^5 - (k-1)^5$, вычислите $\sum_{k=1}^n k^4$.

Указание: $(k-1)^5 = k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 5k - 1$.

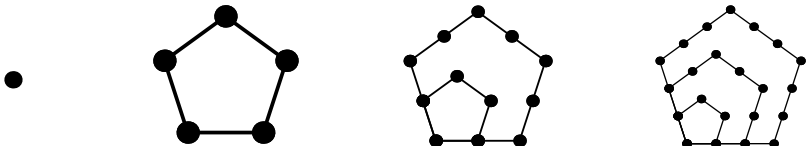
1.5. Пусть шары сложены в виде тетраэдра, у которого каждое ребро состоит из n шаров. Обозначим через $\mathcal{Y}_n$ количество шаров в таком тетраэдре. Докажите следующие свойства тетраэдральных чисел:

а) $\mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_{n-1} + T_n$;

б) $\mathcal{Y}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

в) $\mathcal{Y}_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + n \cdot 1$

1.6. Аналогично треугольным числам T_n можно определить m -угольные числа $P_{m,n}$ (на рисунке показаны примеры для $P_{5,1}$, $P_{5,2}$, $P_{5,3}$ и $P_{5,4}$).



а) Чему равно $P_{m,n} - P_{m,n-1}$?

б) Выразите $P_{m,n}$ через m и n .