

Геометрическое суммирование

1. Введение

Дата нашего занятия — четвёртое октября 2025 года. Нетрудно заметить, что число 2025 обладает такими довольно любопытными свойствами:

$$2025 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3.$$

Совпадение ли это? Оказывается, нет: соотношение

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

выполняется для любого натурального числа n . Из этого соотношения видно, что в прошлый раз подобная ситуация происходила в 1296-м году ($n = 8$), а в следующий раз такое повторится в 3025-м.

Попробуем разобраться, почему выполнено это соотношение, и как вычислять подобные суммы в общем случае.

Для начала напомним сокращённое обозначение суммы. Пусть у нас есть n слагаемых: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ будем обозначать символом $\sum_{k=1}^n a_k$ (читается как «сумма a_k , где k пробегает значение от 1 до n » или просто «сумма a_k по k от 1 до n »). Например, $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$, а $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Вместо буквы k , разумеется, можно взять любую незанятую переменную подобно переменной цикла в программировании. Такое обозначение позволяет в некоторых случаях существенно сократить запись, а также избавляет от неоднозначности прочтения записи в случае, если закономерность, по которой строятся отдельные слагаемые, не является очевидной.

2. Треугольные числа

Как вычислить значение суммы $1 + 2 + 3 + \dots + n$? Самый известный способ подсчёта, изобретение которого обычно приписывают К.Ф.Гауссу, состоит в том, чтобы сложить первое слагаемое с последним, второе с предпоследним, и т.д. Сумма каждой такой пары чисел будет равна $n + 1$, а всего таких пар будет $\frac{n}{2}$, откуда искомая сумма будет равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Впрочем, при таком подходе отдельного рассмотрения заслуживает случай нечётного числа n , но и тут всё просто: числовых пар теперь будет $\frac{n-1}{2}$, но в середине останется одно число $\frac{n+1}{2}$, у которого не будет пары. Следовательно, вся

сумма будет равна $\frac{n-1}{2} \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Таким образом, для любого натурального числа n выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

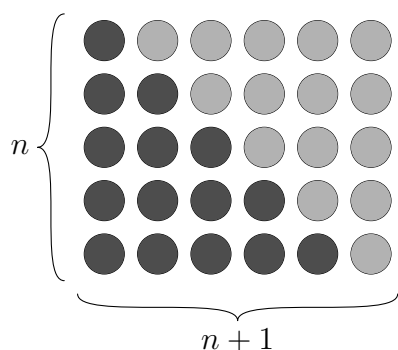


Рис. 1. Геометрический способ вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k$.

Рассматривать отдельно два случая не очень приятно, кроме того, при таком подходе остаётся неясным, почему мы получаем ответ одного и того же вида. Гораздо нагляднее выглядит «геометрическое» доказательство (см. рис. 1). Количество светлых фишек, как и количество тёмных — это искомая сумма $\sum_{k=1}^n k$. При этом количество всех фишек равно $n(n+1)$, так как они образуют прямоугольник размера $n \times (n+1)$.

Поскольку по отдельности светлые и тёмные фишки образуют треугольники, числа вида $\sum_{k=1}^n k$ называют *треугольными числами*.

3. Сумма квадратов

Рассмотрим теперь более сложный пример: $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Как вычислить такую сумму? Для начала попробуем сжульничать и предположим, что кто-то подсказал нам, что ответ будет таким: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Легко проверить его для небольших n , в самом деле:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 1^2 &= 1 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}, & \bullet \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 14 = \frac{3 \cdot (3+1)(2 \cdot 3 + 1)}{6}, \\ \bullet \quad 1^2 + 2^2 &= 5 = \frac{2 \cdot (2+1)(2 \cdot 2 + 1)}{6}, & \bullet \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 &= 30 = \frac{4 \cdot (4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы доказать это в общем случае, то есть для произвольного n , можно воспользоваться *методом математической индукции*. Идея этого метода в следующем. Для $n = 1$ мы эту формулу уже проверили (и даже для нескольких следующих, но это даже неважно). Попробуем доказать, что если формула верна для какого-то конкретного (но произвольного) значения n , например, для $n = N$, то она также будет верна и для n , равного $N + 1$. Если мы докажем это утверждение (его обычно называют *переходом* или *шагом* индукции). Тогда поскольку формула верна для $n = 1$ (это называется *базой* индукции), то она будет верна и для $n = 2$, а значит и для $n = 3$, и так далее — ясно, что так можно дойти до любого натурального числа.

Итак, предположим, что для какого-то конкретного числа N имеет место равенство $\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. Покажем, что в таком случае сумма $\sum_{k=1}^{N+1} k^2$ будет равна $\frac{(N+1)((N+1)+1)(2 \cdot (N+1)+1)}{6} = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} k^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2}_{= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}} + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 = \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{6(N+1)^2}{6} = \frac{N+1}{6} \cdot (N(2N+1) + 6(N+1)) = \\ &= \frac{N+1}{6} \cdot (2N^2 + 7N + 6) = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}. \end{aligned}$$

□

Итак, формулу мы доказали, но как догадаться до ответа? Нельзя ли, как и в случае с треугольными числами, нарисовать красивую картинку, при взгляде на которую всё станет понятно? Оказывается, геометрическое решение есть и здесь. На рисунке 2 изображены 3 треугольника из чисел. Легко видеть, что сумма чисел в каждом из них равна $\sum_{k=1}^n k^2$. В самом деле, там ровно 1 раз встречается число 1, ровно 2 раза число

2, и т.д. Таким образом, сумма всех чисел в этих трёх треугольниках равна $3 \sum_{k=1}^n k^2$. С другой стороны, если отдельно сложить числа в соответствующих друг другу позициях, то получится треугольник, составленный из одинаковых чисел, равных $2n+1$. В самом деле, для углов это видно непосредственно, а при сдвиге на одну позицию в любом направлении значение в одном из треугольников увеличится на 1, в другом уменьшится, а в третьем останется прежним, таким образом сумма трёх значений в любой позиции будет одинаковой. Осталось вспомнить, что количество чисел в таком треугольнике мы уже умеем считать – это $\frac{n(n+1)}{2}$, откуда сумма всех чисел в треугольнике равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. Следовательно, $3 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, откуда

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Метод суммирования

Геометрические конструкции, использованные нами для вычисления сумм $\sum_{k=1}^n k$ и $\sum_{k=1}^n k^2$ выглядят красиво, но они в каком-то смысле искусственно придуманы для конкретных

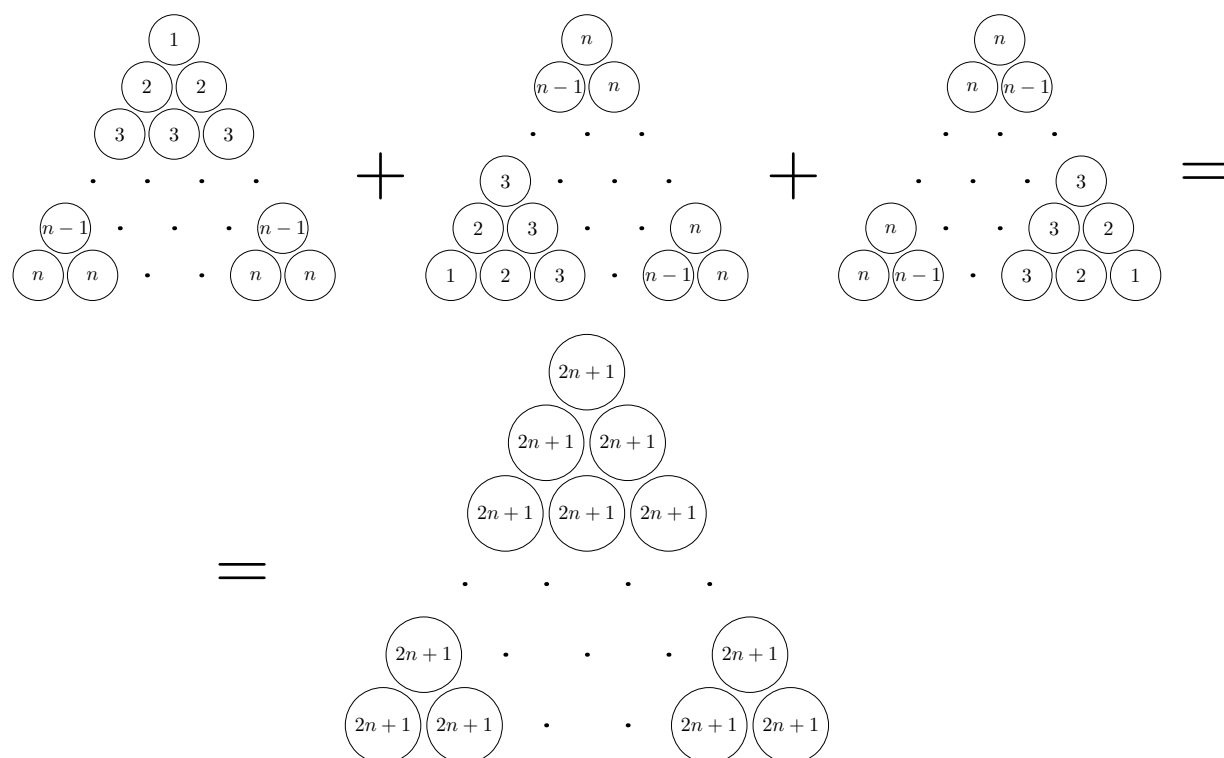


Рис. 2. Геометрический способ вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k^2$.

частных случаев. А как быть, если хочется вычислить сумму $\sum_{k=1}^n k^m$ для произвольно-го значения m ? Можно предположить, что раз $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ — многочлен второй степени от n , а $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ — многочлен третьей степени, то значение суммы $\sum_{k=1}^n k^3$ будет многочленом четвёртой степени, и так далее. Такое предположение позволит вычислить ответ методом неопределённых коэффициентов, а затем доказать его по индукции. Однако при этом будут получаться довольно громоздкие выкладки. Поэтому мы воспользуемся немного другим приёмом, который называется *методом суммирования*. Он позволяет выразить $\sum_{k=1}^n k^m$ через значения такой суммы для предыдущих значений m . Для начала вспомним, что для любого N выполнено соотношение $(N-1)^3 = N^3 - 3N^2 + 3N - 1$, откуда

$$N^3 - (N-1)^3 = 3N^2 - 3N + 1.$$

Подставим в качестве N все возможные значения от 1 до n .

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3n^2 & - & 3n & + & 1 \\ (n-1)^3 & - & (n-2)^3 & = & 3(n-1)^2 & - & 3(n-1) & + & 1 \\ (n-2)^3 & - & (n-3)^3 & = & 3(n-2)^2 & - & 3(n-2) & + & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2^3 & - & 1^3 & = & 3 \cdot 2^2 & - & 3 \cdot 2 & + & 1 \\ 1^3 & - & 0^3 & = & 3 \cdot 1^2 & - & 3 \cdot 1 & + & 1 \end{array} \right.$$

Сложим все эти равенства. В левой части уничтожатся все слагаемые кроме n^3 и 0^3 . Таким образом, получаем:

$$n^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n.$$

Отсюда можно выразить сумму квадратов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n^3 - n}{3} + \sum_{k=1}^n k = \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= (n+1) \left(\frac{n^2 - n}{3} + \frac{n}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{2n^2 - 2n + 3n}{6} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

5. Сумма кубов

Попробуем вычислить тем же методом сумму кубов: $\sum_{k=1}^n k^3$. Легко видеть¹, что $(N-1)^4 = N^4 - 4N^3 + 6N^2 - 4N + 1$. Таким образом,

$$N^4 - (N-1)^4 = 4N^3 - 6N^2 + 4N - 1$$

Подставляя значения в качестве N значения от 1 до n имеем:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} n^4 & - & (n-1)^4 & = & 4n^3 & - & 6n^2 & + & 4n & - & 1 \\ (n-1)^4 & - & (n-2)^4 & = & 4(n-1)^3 & - & 6(n-1)^2 & + & 4(n-1) & - & 1 \\ (n-2)^4 & - & (n-3)^4 & = & 4(n-2)^3 & - & 6(n-2)^2 & + & 4(n-2) & - & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2^4 & - & 1^4 & = & 4 \cdot 2^3 & - & 6 \cdot 2^2 & + & 4 \cdot 2 & - & 1 \\ 1^4 & - & 0^4 & = & 4 \cdot 1^3 & - & 6 \cdot 1^2 & + & 4 \cdot 1 & - & 1 \end{array} \right.$$

Суммируем:

$$n^4 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k - n$$

¹Это соотношение является частным случаем бинома Ньютона, но можно проверить его и непосредственным раскрытием скобок

Выражаем сумму кубов,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} \left(n^4 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n \right) = \frac{1}{4} \left(n^4 + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \\ &= \frac{1}{4} (n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n) = \frac{1}{4} (n(n^3 + 1) + (n+1)(2n^2 + n - 2n)) = \\ &= \frac{1}{4} (n(n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1)(2n^2 - n)) = \frac{1}{4} (n+1)(n^3 - n^2 + n + 2n^2 - n) = \\ &= \frac{1}{4} (n+1)(n^3 + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} (n+1)(n^3 + n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

В качестве упражнения для самостоятельного решения попробуйте, суммируя разность $N^5 - (N-1)^5$, вывести формулу для $\sum_{k=1}^n k^4$. (В качестве указания напомним разложение для пятой степени: $(N-1)^5 = N^5 - 5N^4 + 10N^3 - 10N^2 + 5N - 1$).

Можно ли доказать соотношение для суммы кубов геометрически²? Оказывается, да (см. рис. 3). Количество квадратов со стороной k равно в точности k , а площадь каждого квадрата равна k^2 . Правда при чётных k квадраты перекрываются, поэтому для того, чтобы утверждать, что сумма площадей светло-серых квадратов равна площади большого квадрата, нужно доказать (проделайте это!), что площади пересечений, обозначенных тёмно-серым цветом, равны площадям соответствующих им незакрашенных частей.

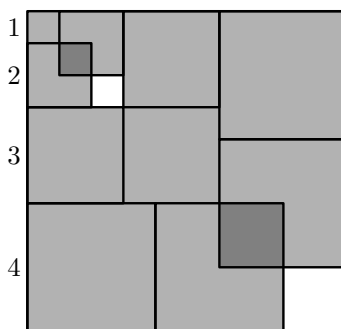


Рис. 3. Геометрический способ вычисления суммы $\sum_{k=1}^n k^3$.

²Данная конструкция не разбиралась на занятии, но достаточно красива, чтобы включить её в конспект.