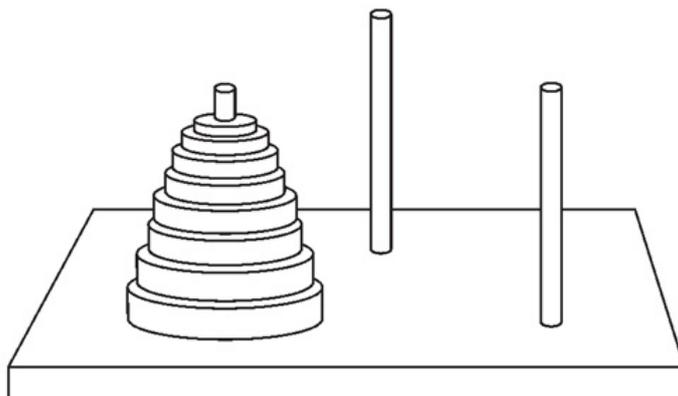


*Математическая индукция*

В задачах этого листочка, если вы рассуждаете по индукции, нужно явно формулировать и доказывать основание (базу) индукции и индукционный шаг (переход). Рассуждения со словами «и так далее» не принимаются!

1. Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.
2. Некоторый (не обязательно выпуклый)  $n$ -угольник разбит непересекающимися диагоналями на несколько треугольников. Диагонали целиком лежат внутри многоугольника. Сколько треугольников может получиться?
3. Плоскость разбита несколькими прямыми и окружностями на области. Докажите, что эти области можно окрасить в два цвета так, что области, граничащие по дуге окружности или по отрезку прямой, будут разного цвета.
4. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Докажите, что эту картинку можно обвести «одним росчерком», то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.
5. *Ханойские башни*. Есть три вертикальных стержня. На одном из них пирамидкой лежат  $n$  колец разного размера — внизу самое большое, сверху самое маленькое (как на рисунке). Кольца можно перекладывать по одному с одного стержня на другой, при этом нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что таким способом можно переместить всю пирамидку на другой стержень.



6. Найдите ошибку в следующем рассуждении. „Докажем, что в любом табуне все лошади одной масти. Обозначим через  $n$  число лошадей в табуне. Будем рассуждать по индукции. Основание индукции:  $n = 1$ . В табуне одна лошадь, значит, и масть тоже одна. Индукционный шаг: рассмотрим табун из  $n + 1$  лошадей. Выберем одну из них и временно выведем из табуна. По предположению индукции все оставшиеся лошади — они образуют табун из  $n$  лошадей! — одной масти. Теперь вернём нашу  $(n + 1)$ -ю лошадь в табун и выведем оттуда какую-нибудь другую лошадь. Остался, опять же, табун из  $n$  лошадей, и он весь одной масти. Значит, и наша  $(n + 1)$ -я лошадь той же масти, что и весь табун. Утверждение доказано“.