

Математическая индукция

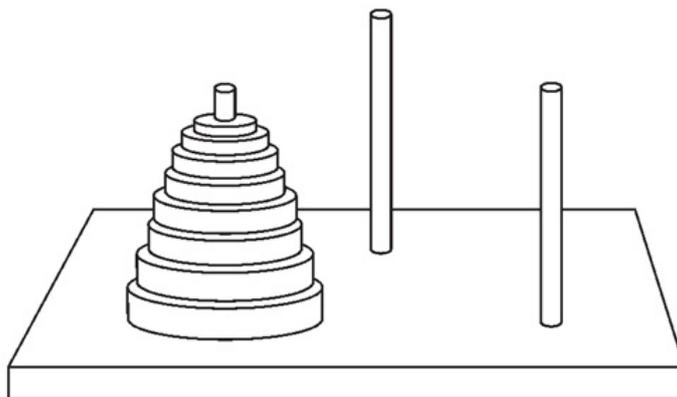
В задачах этого листочка, если вы рассуждаете по индукции, нужно явно формулировать и доказывать основание индукции и индукционный шаг (переход). Рассуждения со словами «и так далее» не принимаются!

1. Плоскость разбита несколькими прямыми и окружностями на области. Докажите, что эти области можно окрасить в два цвета так, что области, граничащие по дуге окружности или по отрезку прямой, будут разного цвета.

2. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Докажите, что эту картинку можно обвести «одним росчерком», то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

3. На плоскости нарисовано n окружностей, в каждой из которых проведён диаметр. Эти окружности и диаметры разбивают плоскость на области. Докажите, что эти области можно окрасить в три цвета так, что области, граничащие по дуге окружности или по отрезку прямой, будут разного цвета.

4. *Ханойские башни.* Есть три вертикальных стержня. На одном из них пирамидкой лежат n колец разного размера — внизу самое большое, сверху самое маленькое (как на рисунке). Кольца можно перекладывать по одному с одного стержня на другой, при этом нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что таким способом можно переместить всю пирамидку на другой стержень.



5. Какое наименьшее число перекладываний потребуется для решения предыдущей задачи?

6. Проведём в выпуклом n -угольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Докажите, что найдутся по крайней мере две несоседние вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.