Будем называть позицию в игре **выигрышной**, если
1) ход игрока, приводящий к ней, означает его выигрыш (т.е. больше ходить не надо, игра окончена и мы победили)
или
2) **любой** ход из этой позиции ведёт в проигрышную позицию.

Будем называть позицию в игре **проигрышной**, если
1) ход игрока, приводящий к ней, означает его проигрыш (т.е. больше ходить не надо, игра окончена и мы проиграли)
или
2) **существует** ход из этой позиции, который ведёт в выигрышную позицию.

Пусть выполнены следующие условия.
а) В игре участвуют двое игроков, которые ходят по очереди.
б) Игра рано или поздно заканчивается, как бы ни ходили игроки.
в) Каждая из возможных позиций игры либо выигрышная, либо проигрышная.
г) Начальная позиция является выигрышной.
Тогда у второго игрока есть выигрышная стратегия. Эта стратегия заключается в том, чтобы каждый раз делать ход, ведущий в выигрышную позицию. Такой ход всегда есть, так как первый игрок всегда будет делать ход, ведущий в проигрышную позицию. А такой ход он всегда будет делать, потому что его позиция всегда будет выигрышной. Так как игра рано или поздно закончится, то либо первый игрок сделает ход в проигрышную позицию, означающую его проигрыш, либо второй игрок сделает ход в выигрышную позицию, означающую его выигрыш. (Для строгого доказательства нужно применить метод математической индукции.) Аналогично, если изначальная позиция является проигрышной, то такая же выигрышная стратегия есть у первого игрока: всегда ходить в выигрышную позицию.
В приведённых ниже задачах описаны правила различных игр. В каждой из игр участвуют двое игроков, которые ходят по очереди, и выиграть может только один из них (кто не выигрывает, тот проигрывает, и наоборот). Требуется указать выигрышную стратегию для одного из игроков. Если выигрышная стратегия описывается словами «всегда ходить в выигрышную позицию», то нужно объяснить, какие позиции являются выигрышными и почему.

-1. [На разбор] На столе лежит 25 спичек. За ход можно убрать 1, 2 или 4 спички. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

0. [На разбор] На столе лежат две кучки спичек: в одной 10 спичек, в другой 7. За ход можно взять одну спичку из одной из кучек (по выбору игрока) или взять по спичке из двух сразу. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. На доске написано число 365. За ход можно уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Проигрывает тот, кто получает ноль.

2. На доске написано число 1. За ход можно умножить его на любое число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто впервые получит число больше 1000.

3. В коробке лежит 255 спичек. За ход можно убрать не более половины имеющихся спичек (хотя бы одну спичку убрать нужно). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. Стрелочные часы показывают 12 часов. За ход можно перевести их на два или три часа вперёд. Выигрывает тот, после чьего хода часы покажут 6.

5. Дано три кучки камней: в первой — 50, во второй — 60, в третьей — 70. За ход можно разбить одну любую кучку на две непустых кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. Дано три кучки камней: в первой — 50, во второй — 60, в третьей — 70. За один ход нужно разбить **каждую** кучку, состоящую более чем из одного камня, на две непустые кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню.

Дополнительные задачи

7. Даны две кучки конфет: в одной 20 конфет, в другой — 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две непустые кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

8. Даны две кучки конфет: в одной 20 конфет, в другой — 21. За ход можно съесть любое число конфет (больше нуля) из одной из кучек (по выбору игрока). Проигрывает тот, кто после своего хода оставляет поровну конфет в кучках.