Вступительная олимпиада 2024/2025 учебного года

8 класс, письменный тур 22.09.2024. Все задачи и решения

1. **В-1.** Кот занимает 75% маленького пакета или 45% большого пакета. На какое минимальное (единое) число процентов нужно увеличить объём обоих пакетов, чтобы в них поместились и заняли всё место несколько таких же котов?

   Примечание 1. Кот не можеть сидеть в двух пакетах одновременно!

   Примечание 2. В пакет можно класть кота, но нельзя класть другой пакет!
   В-2. Кот занимает 45% маленького пакета или 30% большого пакета. На какое минимальное (единое) число процентов нужно увеличить объём обоих пакетов, чтобы в них поместились и заняли всё место несколько таких же котов?

   Примечание 1. Кот не можеть сидеть в двух пакетах одновременно!

   Примечание 2. В пакет можно класть кота, но нельзя класть другой пакет!

   Ответ В-1. 125%
   Ответ В-2. 80%
   Решение. Решение В-1. Из условия маленький пакет равен $\frac{4}{3}$ котов, а большой пакет равен $\frac{20}{9}$ котов. Нужно, чтобы эти числа стали целыми после умножения на одну и ту же дробь. В числителе этой дроби должно стоять 9 (иначе не сократится). Чтобы сделать дробь поменьше, в знаменателе должно стоять число побольше. Максимум можно поставить 4. Значит, нужно умножить на $\frac{9}{4}$, а это и есть плюс 125%.
   Решение В-2. Из условия маленький пакет равен $\frac{20}{9}$ котов, а большой пакет равен $\frac{10}{3}$ котов. Нужно, чтобы эти числа стали целыми после умножения на одну и ту же дробь. В числителе этой дроби должно стоять 9 (иначе не сократится). Чтобы сделать дробь поменьше, в знаменателе должно стоять число побольше. Максимум можно поставить 10, но тогда дробь окажется меньше 1. Значит, нужно в знаменателе поставить 5, и умножить обе дроби на $\frac{9}{5}$, а это и есть плюс 80%.

2. **В-1.** В треугольнике ABC известны длины всех сторон: $AB = 11$, $AC = 15$, $BC = 7$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке I. Через точку I проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает стороны AC и BC треугольника в точках D и E соответственно. Найдите периметр треугольника CDE.
   В-2. В треугольнике ABC известны длины всех сторон: $AB = 12$, $AC = 13$, $BC = 8$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке I. Через точку I проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает стороны AC и BC треугольника в точках D и E соответственно. Найдите периметр треугольника CDE.

   Ответ В-1. 22
   Ответ В-2. 21
   Решение. $\angle DIA = \angle IAB$ по параллельности. Так как AI — биссектриса, получаем, что $\triangle ADI$ равнобедренный и $AD = DI$. Аналогично $IE = EB$. Значит, периметр $\triangle CDE$ равен $AC + CB$.

3. **В-1.** Две стороны четырёхугольника равны 1 и 3. Одна из диагоналей делит его на два равнобедренных треугольника и имеет длину 2. Чему может быть равен периметр четырёхугольника? Перечислите все возможные варианты.
   В-2. Две стороны четырёхугольника равны 2 и 5. Одна из диагоналей делит его на два равнобедренных треугольника и имеет длину 4. Чему может быть равен периметр четырёхугольника? Перечислите все возможные варианты.

   Ответ В-1. 8; 9
   Ответ В-2. 15; 16
   Решение. Решение В-1. Проведём диагональ длины 2, она поделит четырёхугольник

на 2 треугольника. Так как треугольники равнобедренные, стороны 1 и 3 лежат в разных треугольниках. В одном треугольнике стороны 1 и 2, третья сторона должна быть равна 2. В другом треугольнике стороны 2 и 3, третья сторона может быть равна и 2, и 3.

Решение В-2. Проведём диагональ длины 4, она поделит четырёхугольник на 2 треугольника. Так как треугольники равнобедренные, стороны 2 и 5 лежат в разных треугольниках. В одном треугольнике стороны 2 и 4, третья сторона должна быть равна 4. В другом треугольнике стороны 4 и 5, третья сторона может быть равна и 4, и 5.

4. **В-1.** Дан набор из 64 одинаковых равносторонних треугольников. На сторонах каждого треугольника записаны числа 1, 3 и 4. Из этого набора собрали один большой равносторонний треугольник так, чтобы на всех касающихся друг друга сторонах маленьких треугольников было записано одно и то же число. Чему может быть равна сумма чисел на границе большого треугольника? Перечислите все возможные варианты.
   В-2. Дан набор из 64 одинаковых равносторонних треугольников. На сторонах каждого треугольника записаны числа 1, 2 и 3. Из этого набора собрали один большой равносторонний треугольник так, чтобы на всех касающихся друг друга сторонах маленьких треугольников было записано одно и то же число. Чему может быть равна сумма чисел на границе большого треугольника? Перечислите все возможные варианты.

   Ответ В-1. 64
   Ответ В-2. 48
   Решение. Решим сразу для обоих вариантов, считаем, что на сторонах треугольников написаны различные числа a, b, c.
   Индуктивное решение. Собираем постепенно нашу конструкцию: сначала 1 треугольник, потом 4, потом 16, потом 64. Для 1 треугольника сумма чисел на границе равна $a+b+c$, для 4 треугольников — $2(a+b+c)$. Для 16 треугольников: собираем вместе конструкцию из 4 треугольников 4 раза. Нужно сложить сумму чисел на границах 3 "внешних" треугольников и вычесть сумму чисел на границе одного "внутреннего" треугольника. Получится $4(a+b+c)$. Наконец, для 64 треугольников аналогично получаем $8(a+b+c)$.
   Другое решение. В нашей конструкции 28 треугольников, "смотрящих вниз". Сумма чисел на всех треугольниках равна $64(a+b+c)$. При этом сумма чисел, которые оказались внутри, будет равна $2 \cdot 28(a+b+c) = 56(a+b+c)$. Значит, ответ такой: $64(a+b+c) - 56(a+b+c) = 8(a+b+c)$.

5. **В-1.** Джараксус и Рагнарос подготовили для математической игры по 10 карточек. С каждой стороны карточки написано число от 2 до 9, при этом числа с разных сторон одной карточки не могут быть взаимно простыми. Джараксус и Рагнарос разложили карточки на столе и посчитали сумму чисел на лицевой стороне — у каждого получилось 49. Вдруг прилетел Нефариан и своим дыханием перевернул все 20 карточек. Джараксус и Рагнарос снова стали считать сумму чисел на лицевой стороне карточек. Найдите максимально возможную разность между суммой Джараксуса и суммой Рагнароса.
   В-2. Джараксус и Рагнарос подготовили для математической игры по 11 карточек. С каждой стороны карточки написано число от 2 до 9, при этом числа с разных сторон одной карточки не могут быть взаимно простыми. Джараксус и Рагнарос разложили карточки на столе и посчитали сумму чисел на лицевой стороне — у каждого получилось 53. Вдруг прилетел Нефариан и своим дыханием перевернул все 22 карточки. Джараксус и Рагнарос снова стали считать сумму чисел на лицевой стороне карточек. Найдите максимально возможную разность между суммой Джараксуса и суммой Рагнароса.

   Ответ В-1. 68
   Ответ В-2. 75
   Решение. Решение В-1. Для Джараксуса нужно найти максимально возможную сумму, для Рагнароса — минимально возможную. Невозможно, чтобы у Джараксуса оказались все 9, потому что иначе сумма чисел на обратных сторонах карточек обязана делиться на 3. Вариант "девять 9 и одна 8" возможен, если у него изначально были записаны три 9,

шесть 3 и одна 4.
Невозможно, чтобы у Рагнароса оказались все 2, потому что иначе сумма чисел на обратных сторонах карточек обязана делиться на 2. Вариант “девять 2 и одна 3” возможен, если у него изначально были записаны пять 6, четыре 4 и одна 3.
Считаем разность: $(9 \cdot 9 + 8) - (9 \cdot 2 + 3) = 89 - 21 = 68$.
Решение В-2. Для Джараксуса нужно найти максимально возможную сумму, для Рагнароса — минимально возможную. Невозможно, чтобы у Джараксуса оказались все 9, потому что иначе сумма чисел на обратных сторонах карточек обязана делиться на 3. Вариант “десять 9 и одна 8” возможен, если у него изначально были записаны пять 6, пять 3 и одна 8.
Невозможно, чтобы у Рагнароса оказались все 2, потому что иначе сумма чисел на обратных сторонах карточек обязана делиться на 2. Вариант “десять 2 и одна 3” возможен, если у него изначально были записаны пять 2, пять 8 и одна 3.
Считаем разность: $(10 \cdot 9 + 8) - (10 \cdot 2 + 3) = 98 - 23 = 75$.

6. **В-1.** 11 человек участвуют в олимпиаде. В конце для каждого из участников подсчитывается число набранных баллов, и награды распределяются следующим образом: все, кто набрал максимальное число баллов, получают золотые медали; все, кто набрал второе максимальное число баллов, получают серебряные медали; все, кто набрал третье максимальное числов баллов, получают бронзовые медали; остальные не получают ничего. Сколько различных наборов медалей может понадобиться для награждения?

   Примечание. «1 золотая, 1 серебряная, 1 бронзовая» — это один набор; «1 золотая, 1 серебряная, 2 бронзовых» — это второй набор; «2 золотых, 1 серебряная, 2 бронзовых» — это третий набор и т. д. Все эти возможные варианты наборов и нужно подсчитать.
   В-2. 10 человек участвуют в олимпиаде. В конце для каждого из участников подсчитывается число набранных баллов, и награды распределяются следующим образом: все, кто набрал максимальное число баллов, получают золотые медали; все, кто набрал второе максимальное число баллов, получают серебряные медали; все, кто набрал третье максимальное числов баллов, получают бронзовые медали; остальные не получают ничего. Сколько различных наборов медалей может понадобиться для награждения?

   Примечание. «1 золотая, 1 серебряная, 1 бронзовая» — это один набор; «1 золотая, 1 серебряная, 2 бронзовых» — это второй набор; «2 золотых, 1 серебряная, 2 бронзовых» — это третий набор и т. д. Все эти возможные варианты наборов и нужно подсчитать.

   Ответ В-1. 176
   Ответ В-2. 130
   Решение. Решение В-1. Есть 2 случая: была выдана бронзовая медаль или нет. Пусть бронзовая медаль была, тогда были выданы минимум 1 золотая, 1 серебряная и 1 бронзовая. Осталось 9 человек и 3 перегородки, получается $C_{11}^3 = 165$ вариантов. Если бронзовой медали не было, то была выдана минимум 1 золотая медаль и остальные серебряные, это ещё 11 вариантов. Всего 176 вариантов.
   Решение В-2. Есть 2 случая: была выдана бронзовая медаль или нет. Пусть бронзовая медаль была, тогда были выданы минимум 1 золотая, 1 серебряная и 1 бронзовая. Осталось 8 человек и 3 перегородки, получается $C_{10}^3 = 120$ вариантов. Если бронзовой медали не было, то была выдана минимум 1 золотая медаль и остальные серебряные, это ещё 10 вариантов. Всего 130 вариантов.

7. **В-1.** В кинозале 8 рядов. Места в каждом ряду пронумерованы от 1 до 16. Зрители купили билеты и заняли все места в зале, но каждый зритель перепутал либо номер места, либо номер ряда. При этом известно, что если зритель А сидит на месте зрителя Б, то зритель Б не может сидеть на месте зрителя А. За одну операцию разрешается поменять местами двух зрителей, которые сидят либо в одном ряду, либо на местах с одним номером.

   а) Найдите минимальное число операций, которое необходимо, чтобы гарантированно рассадить всех зрителей по местам.

б) Теперь вы сами можете рассадить зрителей в соответствии с условиями задачи. Какого минимального числа операций достаточно в этом случае?

Примечание. Опишем простым языком: чем меньше операций нужно, тем лучше случай. В пункте а) нужно найти число операций для наихудшего случая, а в пункте б) — для наилучшего.

В-2. В кинозале 10 рядов. Места в каждом ряду пронумерованы от 1 до 14. Зрители купили билеты и заняли все места в зале, но каждый зритель перепутал либо номер места, либо номер ряда. При этом известно, что если зритель А сидит на месте зрителя Б, то зритель Б не может сидеть на месте зрителя А. За одну операцию разрешается поменять местами двух зрителей, которые сидят либо в одном ряду, либо на местах с одним номером.

а) Найдите минимальное число операций, которое необходимо, чтобы гарантированно рассадить всех зрителей по местам.

б) Теперь вы сами можете рассадить зрителей в соответствии с условиями задачи. Какого минимального числа операций достаточно в этом случае?

Примечание. Опишем простым языком: чем меньше операций нужно, тем лучше случай. В пункте а) нужно найти число операций для наихудшего случая, а в пункте б) — для наилучшего.

Ответ В-1. 127; 86

Ответ В-2. 139; 94

Решение. Общая идея: образуем граф, 2 зрителя соединены ребром, если один из них сидит на месте другого. Этот граф состоит из циклов длины хотя бы 3. В пункте а) нужен граф с максимальным числом рёбер, в пункте б) — с минимальным.

Решение В-1. Максимальное число рёбер получится, если весь граф образует один цикл. Тогда в нём $8 \cdot 16 = 128$ рёбер, что даст 127 операций.

В пункте б) разбить зрителей на тройки не получится (128 не делится на 3), получится разбить на одну пятёрку и 41 тройки. В пятёрке нужно 4 операции, в тройках — по 2, всего $4 + 41 \cdot 2 = 86$ операций.

Решение В-2. Максимальное число рёбер получится, если весь граф образует один цикл. Тогда в нём $10 \cdot 14 = 140$ рёбер, что даст 139 операций.

В пункте б) разбить зрителей на тройки не получится (140 не делится на 3), получится разбить на одну пятёрку и 45 троек. В пятёрке нужно 4 операции, в тройках — по 2, всего $4 + 45 \cdot 2 = 94$ операции.