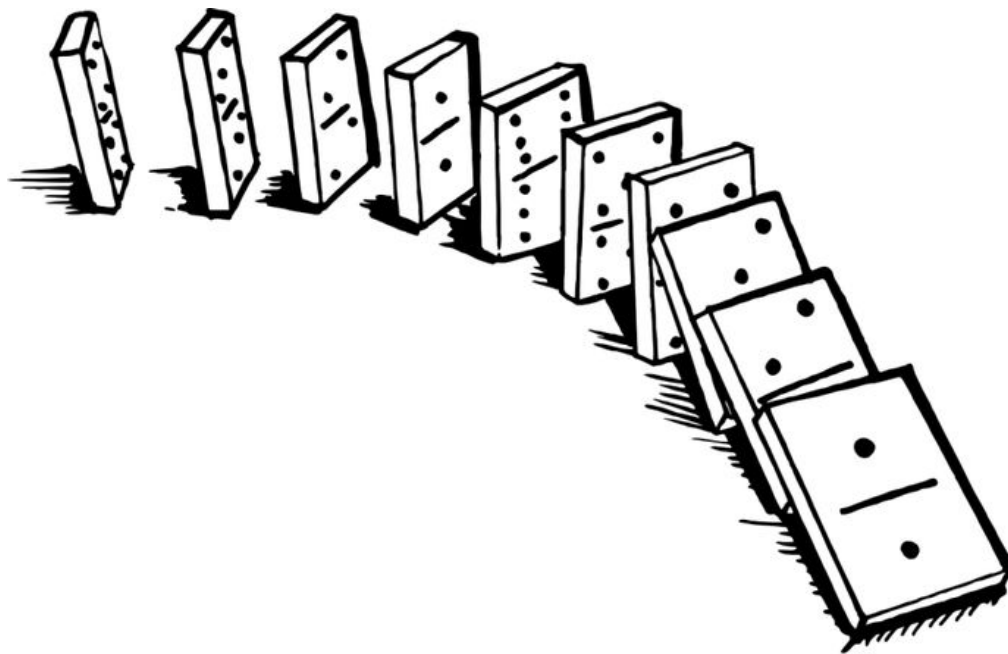


Метод математической индукции заключается в следующем. Если нужно доказать, что некоторое утверждение $P(n)$ верно для любого натурального числа n , то для этого достаточно доказать два утверждения.

1) (*База индукции*) Доказать $P(1)$ — утверждение верно при $n = 1$.

2) (*Шаг индукции*) Для любого натурального m доказать $P(m) \Rightarrow P(m + 1)$ — для любого натурального m , если утверждение верно при $n = m$, то оно верно и при $n = m + 1$. В данном контексте утверждение $P(m)$ называется *предположением индукции*. Его нужно не доказывать, а принять как данность, и уже исходя из этого доказывать утверждение $P(m + 1)$.



Когда может быть полезно использовать метод математической индукции?

- Когда легко сделать переход от одного утверждения к другому, добавив к параметру единицу.
- Когда в утверждении присутствует натуральный параметр n .
- Когда в утверждении присутствует большое число (можно обобщить его и доказывать по индукции).

Когда необязательно использовать метод математической индукции?

- Когда нужно сделать ограниченное число шагов. Можно не обобщать утверждение и сделать, например, 99 шагов, чтобы доказать утверждение $P(100)$. Для этого индукция не требуется.
- Когда утверждение можно доказать одним и тем же рассуждением независимо от величины n .

Почему в некоторых случаях необходимо использовать метод математической индукции?

- Рассуждение типа « $P(1)$ верно, отсюда следует, что $P(2)$ верно, отсюда следует, что $P(3)$ верно, и так далее...» не является достаточно строгим, так как непонятно, почему это верно всегда, для всех n , которых бесконечно много. Можно сделать 1 шаг, 2 шага или миллион шагов, но непонятно, как сделать $n - 1$ шагов, так как параметр n неограничен. В таких случаях необходимо использовать метод математической индукции.

Иногда метод математической индукции используется в доказательстве *неявно* — в самом доказательстве его нет, но используется вспомогательное утверждение, для доказательства которого он используется. Если ваше доказательство имеет такой вид, мы будем считать, что метод математической индукции в нём *используется*.

Индукция не обязательно происходит по схеме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$. Цепочка может начинаться не с 1. Некоторые утверждения могут быть пропущены, а затем доказаны другими способами. Утверждения в цепочке могут следовать в другом порядке. Цепочка может быть разветвлённой и т.д.

Задачи — на обратной стороне листа!

0. [На разбор] Докажите, что для любого натурального n верно равенство $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
1. Докажите, что количество способов пронумеровать n разных объектов равно $n!$.
2. Докажите, что для любого натурального n верно равенство $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Нарисуйте картинку, иллюстрирующую ваше доказательство.
3. Докажите, что любой четырёхугольник можно разрезать на 2024 четырёхугольника. В доказательстве
- а) используйте метод математической индукции;
 - б) не используйте метод математической индукции.
4. Докажите, что сумма любых 4 последовательных натуральных чисел чётна. В доказательстве
- а) используйте метод математической индукции;
 - б) не используйте метод математической индукции.
- в) Докажите, что сумма любых $4n$ последовательных натуральных чисел чётна.
5. а) Докажите, что произведение любых 5 последовательных натуральных чисел делится на 5.
б) Докажите, что произведение любых 6 последовательных натуральных чисел делится на 6!
6. В государстве n городов, каждая пара городов соединена одной дорогой. Докажите, что на каждой дороге можно так указать направление движения, чтобы из каждого города либо нельзя было выехать, либо, выехав, нельзя было вернуться. В доказательстве
- а) используйте метод математической индукции;
 - б) не используйте метод математической индукции.

Дополнительные задачи

7. В шахматном турнире участвовало n человек. Каждая пара игроков сыграла по одной партии, причём ничьих не было. Докажите, что всегда можно так пронумеровать игроков, что первый выиграл у второго, второй выиграл у третьего, $\dots$, $(n - 1)$ -ый выиграл у n -ого.
8. В коробке лежат n разных шариков. Докажите, что количество способов выбрать из них чётное число шариков и количество способов выбрать из них нечётное число шариков совпадают. В доказательстве
- а) используйте метод математической индукции;
 - б) не используйте метод математической индукции.
9. Найдите ошибку в следующих рассуждениях.
- а) Докажем, что любое натуральное число n больше 100. В самом деле, принцип индукции позволяет это доказывать, считая известным это утверждение числа, меньшего на 1. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$, то есть $n - 1 > 100$. Тогда $n > 101$ и тем более $n > 100$, что и требовалось доказать.
 - б) Докажем, что если в стране (в которой хотя бы два города) из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то из любого города можно попасть в любой другой город страны.
- Индукция по числу городов. База, $n = 2$ (страна из двух городов), очевидна. Проведем индукционный переход. Возьмем произвольную страну с n городами и добавим к ней новый город, из которого выходит хотя бы одна дорога. Эта дорога ведет в один из старых городов. По предположению индукции из любого старого города можно попасть в любой другой старый город. Следовательно, из нового города можно попасть в любой старый город (и наоборот). Значит, из любого города можно попасть в любой другой город. Утверждение доказано по индукции.