

При использовании метода математической индукции полезно учитывать следующие возможности.

Цепочку доказательств необязательно начинать с 1. Базой индукции может быть, например, утверждение $P(3)$ — в этом случае утверждение будет доказано не для всех натуральных чисел, а только для $n \geq 3$.

Цепочек доказательств может быть несколько. Например, одна идёт по чётным числам, вторая — по нечётным. В этом случае нужно две базы индукции, например, $P(1)$ и $P(2)$, а шаг индукции будет иметь вид $P(m) \Rightarrow P(m+2)$.

Полная индукция. В качестве предположения индукции можно использовать не только утверждение $P(m)$, а (при необходимости) сразу все утверждения $P(1), P(2), \dots, P(m)$.

Обобщение исходного утверждения. Иногда доказательство шага индукции требует более общего утверждения в предположении индукции. В этом случае имеет смысл обобщить само утверждение $P(n)$ до некоторого утверждения $P'(n)$, и доказывать уже его по индукции.

0. [На разбор] Для каких натуральных n верно следующее утверждение? Из n равных треугольников можно собрать четырёхугольник.

1. На сколько треугольников можно разрезать пятиконечную звезду ★?

2. Для каких натуральных n верно следующее утверждение?

- а) Любой квадрат можно разрезать на n прямоугольников, из которых ровно один является квадратом.
- б) Любой прямоугольник можно разрезать на n прямоугольников, из которых ровно один является квадратом.

3. а) Докажите, что для любого целого неотрицательного n любой треугольник можно разрезать на 4^n равных треугольников.

б) Докажите, для любого натурального n любой правильный треугольник можно разрезать на $4n$ правильных треугольников.

4. Какие натуральные числа можно получить, складывая

- а) двойки и семёрки?
- б) тройки и пятёрки?

Сумма может состоять из одного слагаемого.

5. При каких натуральных n выполнены следующие неравенства?

- а) $n! > 2^n$.
- б) $2^n > n^2$.

6. а) По кругу в произвольном порядке разложены n красных и n синих шариков. Докажите, что любую такую комбинацию шариков можно получить, последовательно добавляя пары из соседних разноцветных шариков в пустой круг.

б) Останется ли утверждение верным, если во всех добавляемых парах синий шарик обязательно должен следовать за красным по часовой стрелке?

Дополнительные задачи

7. На полу лежит пакет, в нём лежат пакеты. Некоторые из них лежат в других пакетах. При этом для любого натурального n выполнено следующее свойство: если какой-то пустой пакет лежит ровно в $n+1$ пакетах, то найдётся пустой пакет, лежащий ровно в n пакетах. Докажите, что можно вынуть некоторые пакеты вместе со всем содержимым на пол так, что в результате на полу будет лежать несколько непустых пакетов с пустыми пакетами внутри.

8. На краю пустыни имеется неограниченный запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Докажите, что машина может проехать любое расстояние вглубь пустыни. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

9. а) Докажите, что в любом многоугольнике существует диагональ, которая содержится полностью внутри многоугольника.

б) Докажите, что любой n -угольник можно порезать непересекающимися диагоналями на $n-2$ треугольника.