

Вступительная работа. Решения

27.09.25

1. Серёжа решил, что если он приобретёт 10 книг, то у него останется 1000 рублей, а на покупку 12 книг ему не хватит 1400 рублей. Сколько стоит одна книга?

Ответ. 1200.

Решение. Пусть одна книга стоит x рублей. Тогда из первого условия получаем, что у Серёжи имеется $10x + 1000$ рублей, а из второго условия — $12x - 1400$ рублей. Приравнявая эти выражения получаем, что $x = 1200$.

2. За круглым столом сидят 12 жителей острова рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал: «Справа от меня среди ближайших двоих соседей один рыцарь и один лжец». Сколько лжецов сидят за столом, если не все жители лжецы?

Ответ. 4 лжеца.

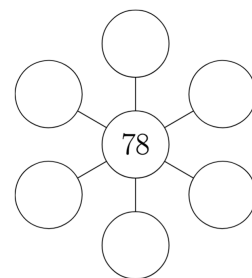
Решение. Если утверждение о соседях справа произносит рыцарь, то это означает, что справа от него сидят рыцарь и лжец в любом порядке, а если его произносит лжец, то справа от него сидит либо два рыцаря, либо два лжеца. По условию задачи, среди сидящих есть хотя бы один рыцарь. Рассмотрим два случая:

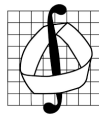
- 1) Ближайший сосед справа этого рыцаря — рыцарь. Тогда следующий — лжец, потом рыцарь (потому что справа от рыцаря должны быть рыцарь и лжец), далее снова рыцарь (потому что справа от лжеца либо два рыцаря, либо два лжеца), далее лжец... Нетрудно заметить, что имеет место чередование: два рыцаря, один лжец, два рыцаря, один лжец и так далее.
- 2) Ближайший сосед справа этого рыцаря — лжец. Тогда следующий — рыцарь, далее снова рыцарь, потом лжец и так далее. Аналогично предыдущему случаю снова имеет место чередования: два рыцаря, один лжец, два рыцаря, один лжец.

Итого 12 сидящих естественным образом разбиваются на 4 группы, в каждой из которых 2 рыцаря и 1 лжец. Таким образом, за столом сидит 4 лжеца.

3. В семи кружках расставлены различные числа так, что сумма чисел в любых трёх кружках, лежащих на одной прямой, одинакова и равна x . Сумма всех семи чисел равна 546, а в центре стоит число 78. Чему равно x ?

Ответ. 234.





Решение. Сложим все числа в кружках вдоль трёх прямых, проходящих через центральный кружок. С одной стороны, эта сумма равняется $3x$, с другой стороны, она же равняется сумме чисел по всем семи кружкам плюс дважды число в центральном кружке. Получаем уравнение $3x = 546 + 2 \cdot 78$. Решая это уравнение находим $x = 234$.

4. Сколько существует четырёхзначных чисел, в которых отсутствуют нули и ровно одна цифра делится на 3?

Ответ. 2592.

Решение. Пусть только первая цифра числа делится на 3. Тогда есть 3 способа выбрать первую цифру (3, 6 или 9) числа и 6 способов выбрать каждую из оставшихся цифр числа (1, 2, 4, 5, 7 или 8). Всего получаем $3 \cdot 6^3$ способов. Аналогично, если только вторая, только третья или только четвёртая цифра числа делится на 3. Итого получаем $4 \cdot 3 \cdot 6^3 = 2592$ способа составить число, удовлетворяющее требованиям задачи.

5. В классе учатся 10 человек. Им необходимо собрать команду для игры в стритбол из трёх человек и назначить одного из них капитаном. Сколькими способами это можно сделать? Способы, в которых капитаны отличаются, считаются разными.

Ответ. 360.

Решение. Группу из трёх человек можно выбрать $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}$ способами. Выбрать в такой группе капитана можно 3 способами. Итого собрать команду можно $3 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 360$ способами.

6. В равнобедренном $\triangle PQR$ (с основанием PR) на продолжении боковой стороны QR за точку R отложен отрезок $RX = PR$. Оказалось, что $PX = PQ$. Найдите угол PQR .

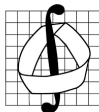
Ответ. 36.

Решение. Пусть $\angle PXR = \alpha$. Тогда $\angle PQR = \alpha$, поскольку $\triangle PQX$ равнобедренный. Заметим, что $\triangle PRX$ тоже равнобедренный, значит $\angle XPR = \alpha$. По теореме о внешнем угле $\angle PRQ = \angle XPR + \angle PXR = 2\alpha = \angle QPR$. По теореме о сумме углов треугольника: $\angle PQR + \angle QPR + \angle XPR + \angle PXR = 5\alpha = 180^\circ$. Отсюда $\alpha = 36^\circ$.

7. Известно, что $x^2 + y^2 = 5$, $xy = 3$. Найдите все возможные значения $(x + y)^4$. Если значений несколько, то выпишите их в порядке возрастания через запятую.

Ответ. 121.

Решение. $(x + y)^4 = ((x + y)^2)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)^2 = (5 + 2 \cdot 3)^2 = 11^2 = 121$.



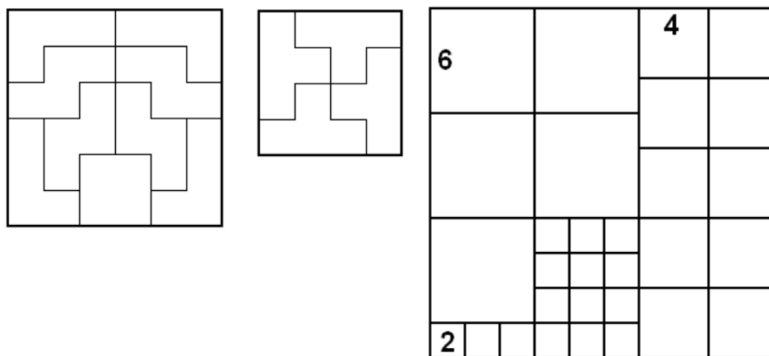
8. Известно, что существуют 5 видов клетчатого тетрамино. При каком наименьшем n существует доска $n \times n$, которую можно полностью замостить (без перекрытия) комплектом, в котором все виды тетрамино встречаются одинаковое количество раз?

Ответ. 20.

Решение. Пусть на доске x фигурок каждого вида, тогда площадь квадрата равна $4 \cdot 5x = 20x$. Это число должно быть квадратом. Тогда минимальный размер доски равен 10×10 , где $x = 5$. Пусть нам удалось замостить доску тетраминошками. Раскрасим доску в шахматную раскраску и посчитаем количество чёрных и белых клеток со стороны доски и со стороны фигур. Со стороны доски чёрных и белых клеток будет поровну по 50 штук, то есть чётное число. Со стороны тетрамино — нечётное: в фигурке «Т» будет нечётное количество клеток каждого цвета и самих фигур 5 штук, а в остальных фигурках будет по 2 чёрных и белых клетки. Противоречие.

Покажем, что сможем замостить квадрат 20×20 равным количеством фигурок. Квадрат 6×6 можно замостить четырьмя Z-тетрамино, четырьмя Г-тетрамино и одним квадратом (см. рис.), квадрат 4×4 можно замостить и четырьмя Т-тетрамино (см. рис.), и четырьмя тетрамино 1×4 . Соответственно квадрат 20×20 можно составить из пяти квадратов 6×6 пяти квадратов 4×4 из Т-тетрамино, пяти квадратов 4×4 из прямоугольников 1×4 и 15 квадратов 2×2 , т.е. в квадрате 20×20 каждое тетрамино встретится по 20 раз. *Варианты примера на следующей странице.*

Пример 1.



Пример 2. Замостим 4×10 двумя наборами тетрамино как показано на рисунке, после такими прямоугольниками замостим 20×20 .

