ММФ-8. Занятие 20. Формула Эйлера (15.04.2023)

- *Граф* — набор точек (*вершин*), некоторые из которых соединены линиями (*рёбрами*).
- Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно дойти до любой другой, двигаясь по его рёбрам; иначе граф называется *несвязным* и распадается на несколько *компонент связности.*
- *Планарный граф* — граф, который *можно нарисовать* на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались (кроме как в вершинах). *Плоский граф* — граф, *уже нарисованный* на плоскости так, что его рёбра не пересекаются (кроме как в вершинах).
- *Грань плоского графа* — часть плоскости, со всех сторон ограниченная рёбрами этого графа и не содержащая внутри себя других его рёбер.

Формула Эйлера. Пусть В — число вершин <u>плоского связного</u> графа, Р — число его рёбер, Г — число граней. Тогда В − Р + Г = 1.

20.1. а) Нарисуйте граф, образованный всеми вершинами и рёбрами куба.
б) А теперь нарисуйте этот же граф так, чтобы его рёбра не пересекались. Посчитайте для него В, Р и Г. Найдите значение выражения В − Р + Г.
в) То же задание для графа, вершинами которого служат вершины квадрата, а рёбрами — все стороны и диагонали этого квадрата.

20.2. В стране Озёрная 7 озёр, соединённых между собой десятью каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого по каналам. Сколько в этой стране островов?

20.3. Внутри квадрата отметили 20 точек и соединили некоторые из них непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат оказался разбит на треугольники.
а) Пусть треугольников Т штук. Сколько тогда отрезков? **б)** Найдите Т.

20.4. Докажите, что для плоского графа, в котором больше двух вершин, выполнены неравенства: **а)** 2Р $\geqslant$ 3(Г + 1); **б)** Р $\leqslant$ 3В − 6.
Подсказки. **а)** *У каждой грани не менее трёх рёбер, а каждое ребро принадлежит максимум двум граням.* **б)** *Сначала докажите неравенство для связного графа: воспользуйтесь пунктом а) и формулой Эйлера.*

20.5. В уезде пять помещичьих усадеб, каждая из которых соединена прямыми дорогами со всеми остальными усадьбами.
а) Сколько всего дорог между усадьбами в уезде?
б) Докажите, что какие-то из этих дорог пересекаются (вдали от усадеб).
Подсказка: воспользуйтесь предыдущей задачей.

20.6. В маленькой деревне три дома и три колодца, и каждый дом напрямую соединён тропинками со всеми колодцами. Докажите, что какие-то из этих тропинок пересекаются (вдали от домов и колодцев).
Подсказка: рассмотрите соответствующий граф и докажите, что, если бы он был плоским, для него было бы выполнено неравенство $P \geqslant 2Г + 2$.

20.7. *Деревом* называется связный граф, в котором нет *циклов*, то есть замкнутых путей по рёбрам. Ясно, что дерево — планарный граф.
а) Дерево нарисовали на плоскости. Докажите, что $\text{Г} = 0$.
б) Докажите, что в дереве всегда есть *висячая вершина*, то есть вершина, из которой выходит только одно ребро.
в) Не пользуясь формулой Эйлера, докажите, что в дереве $\text{В} - \text{Р} = 1$.
Подсказка: что произойдёт с числом $B - P$*, если от дерева «оторвать» висячую вершину вместе с выходящим из неё ребром?*

20.8. **а)** В плоском графе удалили одно из рёбер, составляющих границу некоторой грани (но все вершины оставили). Как изменились от этого числа В, Р, Г для этого графа? Изменилось ли значение выражения $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$?
б) Докажите формулу Эйлера, пользуясь результатом предыдущей задачи и пункта а): постепенно удаляя рёбра, превратите граф в дерево.
в) Придумайте и докажите аналог формулы Эйлера для несвязных графов.
г) Придумайте и докажите аналог формулы Эйлера для *сферических графов* (т. е. графов, нарисованных на поверхности сферы так, что их рёбра пересекаются только в вершинах).

20.9. Каждое ребро *полного графа* (то есть графа, в котором каждая вершина соединена с каждой ровно одним ребром) с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо «красный», либо «синий» граф не является планарным.

20.10. Докажите, что в планарном графе есть вершина, степень которой не более 5.

20.11. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.
