

Прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого выражаются целыми числами, называется *пифагоровым треугольником*. Упорядоченная тройка натуральных чисел (a, b, c) называется *пифагоровой тройкой*, если $a^2 + b^2 = c^2$. То есть пифагорова тройка — это набор длин сторон некоторого пифагорова треугольника.

19.1. Зная длины двух сторон пифагорова треугольника, найдите длину третьей стороны и выясните, какая из сторон является гипотенузой:

а) 3 и 5; б) 24 и 25; в) 8 и 15; г) 5 и 13.

19.2. Приведите пример пифагорова треугольника с заданной длиной гипотенузы: а) 15; б) 39; в) 100; г) 289.

19.3. Докажите, что пифагоровых троек бесконечно много.

19.4. а) Существуют ли равнобедренные пифагоровы треугольники?

б) Существуют ли пифагоровы треугольники с острым углом 30° ?

19.5. Может ли пифагорова тройка состоять из трех нечетных чисел?

19.6. а) Какие остатки от деления на 4 могут давать квадраты целых чисел?

б) Могут ли оба катета пифагорова треугольника иметь нечетные длины?

в) Докажите, что площадь пифагорова треугольника всегда выражается целым числом.

19.7. В некотором пифагоровом треугольнике длины сторон — взаимно простые числа (такой пифагоров треугольник называется *примитивным*). Докажите, что длина гипотенузы нечетна, а длины катетов — разной четности.

19.8. Сколько существует пифагоровых треугольников, в которых один из катетов равен: а) 7; б) 15; в) 1; г) 4; д) 6?

19.9. Докажите, что для любого нечетного числа, кроме 1, существует пифагоров треугольник, в котором длина одного из катетов равна этому числу. Какие из этих треугольников заведомо не подобны друг другу?

19.10. Докажите, что существует бесконечно много пифагоровых треугольников, не подобных друг другу.

19.11. Докажите, что в пифагоровом треугольнике: а) длина одного из катетов делится на 3; б) длина одной из трёх сторон делится на 5.