ММФ-8. Занятие 18. Первое апреля (01.04.2023)

В этом листочке все задачи уже решены! Вот только некоторые решения содержат ошибки. Ваша задача — найти эти ошибки (и исправить, если это возможно). Будьте внимательны: в листочке есть и верные решения, и «неправильные» (некорректные) задачи!

18.1. Докажите, что $2+2=5$.

Решение. Очевидно, что $0=0$. Также очевидно, что $2\cdot(5+5)-2\cdot(5+5)=0$ и $5\cdot5-5\cdot5=0$. Отсюда получаем, что $2\cdot(5+5)-2\cdot(5+5)=5\cdot5-5\cdot5$. Раскрыв скобки и произведя группировку некоторых слагаемых, получим $2\cdot(5-5)+2\cdot(5-5)=5\cdot(5-5)$, или $(2+2)\cdot(5-5)=5\cdot(5-5)$. Сократим общий множитель и получим, что $2+2=5$, что и требовалось доказать. $\square$

18.2. Петя с другом пошли в тир. Уговор был такой: Пете даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает ещё три патрона. Петя стрелял, пока патроны не кончились, и сделал всего 34 выстрела. Сколько раз он попал в цель?

Решение. У Пети было патронов на 10 выстрелов, а выстрелил он 34 раза, значит, 24 патрона он получил дополнительно. Заметим, что при каждом попадании общее количество патронов у Пети увеличивается на 2: один патрон он тратит на выстрел, но получает три патрона взамен. Значит, Петя попал в цель $24:2=12$ раз. $\square$

18.3. Гагара вылетела из населённого пункта Уэлен на Чукотке 1 июля ровно в 3 часа утра по местному времени и прилетела в населённый пункт Уэйлс на Аляске 30 июня ровно в 10 часов утра по местному времени. Оттуда гагара вылетела 1 июля в 3 часа дня по местному времени и прилетела обратно в Уэлен 2 июля в 4 часа дня по местному времени. Определите длительность полёта гагары в одну сторону, если известно, что в обе стороны она летела с одной и той же постоянной скоростью одним и тем же кратчайшим маршрутом, который пересекает линию перемены дат.

Решение. Разница между местным временем прилёта в Уэйлс и местным временем вылета из Уэлена составляет (-17) часов, а разница между местным временем прилёта в Уэлен и местным временем вылета из Уэйлса составляет 25 часов. Эта разность в первом случае складывается из длительности полёта, разности часовых поясов и (-24) часов, «сэкономленных» за счёт линии перемены дат, а во втором случае — из длительности полёта, разности часовых поясов (в обратную сторону) и «лишних» 24 часов, добавившихся из-за перемены дат. Значит, если сложить эти две разности, то разности часовых поясов сократятся, а также сократятся «сэкономленные» и «лишние» 24 часа, и останется просто удвоенная длительность полёта. Значит, длительность полёта равна $(-17+25):2=4$ часа. $\square$

18.4. Клавдия Семёновна сохранила в телефоне семизначный номер своего внука. Однако, позвонив ему, она обнаружила, что записала семизначный номер неправильно — пропустила какую-то одну цифру. Сколько номеров придётся обзвонить Клавдии Семёновне, чтобы точно дозвониться до внука?

Решение. Пропущенная цифра могла стоять перед самой первой цифрой, или между первой и второй, или между второй и третьей, и т. д. — всего 7 позиций. На каждой из этих позиций могла стоять любая из 10 цифр. Значит, есть $10 \cdot 7 = 70$ возможных вариантов правильного номера. □

18.5. Можно ли на доске 10×10 расставить 13 кораблей 1×4 для «морского боя»? Корабли не должны соприкасаться ни сторонами, ни углами.

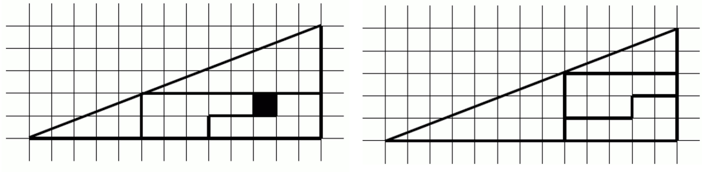
Решение. Посмотрим, сколько клеточек занимает каждый корабль. Так как он не должен соприкасаться с другими кораблями ни сторонами, ни углами, очертим вокруг него границу шириной в половину клеточки. Таким образом, каждый корабль занимает $4 + 4 + 1 = 9$ клеточек. С другой стороны, доска 10×10 даёт нам $100 + 10 + 10 = 120$ клеточек (с учётом тех самых «границ»), а $13 \cdot 9 = 117 < 120$. Значит, 13 кораблей расставить можно. □

18.6. В универмаге нарядили несколько новогодних ёлок. На 12 из них есть красные шары, на 11 — жёлтые, на 19 — синие, на 6 — красные и жёлтые, на 8 — красные и синие, на 7 — жёлтые и синие, а на одной — шары всех трёх цветов. Сколько ёлок нарядили в универмаге?

Решение. Сложим $12 + 11 + 19 = 42$. При этом мы посчитали ёлки, на которых висят шары двух цветов, по два раза. Вычтем их количества из полученной суммы по одному разу: $42 - 6 - 8 - 7 = 21$. Теперь никакие ёлки не посчитаны дважды. Однако теперь получается, что ёлку с шарами трёх цветов мы сначала три раза посчитали, а потом три раза вычли, то есть она у нас сейчас не учтена вовсе. Добавив её, получим $21 + 1 = 22$ ёлки. □

18.7. Докажите, что $64 = 65$.

Решение. Разрежем треугольник площади 65 клеток на части, выкинем одну клетку и из оставшихся частей сложим треугольник — точно такой же, но его площадь будет уже 64 клетки.



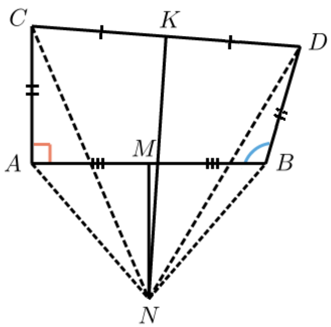
□

18.8. В воскресенье вечером одноклассники звонили друг другу, чтобы узнать домашнее задание. Известно, что каждый ответил по крайней мере на 10 звонков. Также известно, что никакие два одноклассника не разговаривали друг с другом за вечер больше одного раза. Какое наименьшее количество учеников может быть в классе?

Решение. Возьмём одного человека. Ему позвонили ещё минимум 10 разных людей (пусть это будут 2-й, 3-й, 4-й, ..., 11-й); итого уже 11 человек. Возьмём второго. Первый ему звонить уже не может — они уже поговорили. Пусть ему позвонят все с 3-го по 11-го — это 9 человек; тогда нужен ещё 12-й, чтобы второму позвонили 10. (Если второму позвонят не все с 3-го по 11-го, то придётся добавить больше новых людей, тогда и общее количество не будет минимальным.) Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что требуется минимум 21 человек. □

18.9. Докажите, что прямой угол равен тупому.

Построение (см. чертёж). Проведем отрезок AB. Построим $\angle CAB = 90°$ и $\angle ABD > 90°$. Построим отрезки $AC = BD$. Соединим точки C и D. Пусть M — середина AB, K — середина CD. Проведем серединный перпендикуляр MN к отрезку AB и серединный перпендикуляр KN к отрезку CD (MN и KN пересекаются в точке N).



Доказательство. Рассмотрим ΔABN. Он равнобедренный, поскольку в нём MN — одновременно медиана и высота. Следовательно, $AN = BN$, и $\angle MAN = \angle MBN$. Аналогично, ΔCDN — равнобедренный, следовательно, $CN = DN$. Поскольку $AN = BN$, $CN = DN$ (по доказанному), а $AC = BD$ (по построению), получаем, что $\Delta CAN = \Delta DBN$ (по трём сторонам). Следовательно, $\angle CAN = \angle DBN$.

Мы доказали, что $\angle CAN = \angle DBN$ и $\angle MAN = \angle MBN$. Поскольку $\angle CAN = \angle MAN + \angle CAM$, а $\angle DBN = \angle MBN + \angle DBA$, получаем, что $\angle CAM = \angle DBA$, то есть прямой угол равен тупому, что и требовалось доказать.