

В этом листке числа a , b и c считаются положительными.

16.1. Докажите неравенства: а) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; б) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

16.2. Докажите, что среди всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

16.3. В выражении

а) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 20$ все множители заменили на 15;

б) $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{20}$ все слагаемые заменили на $\frac{1}{15}$.

Увеличилось или уменьшилось данное выражение?

16.4. В двух племенах индейцев разное количество мужчин. Все мужчины одного племени — «братья» (в частности, каждый мужчина — сам себе «брат»). Что больше: среднее количество мужчин в этих племенах или среднее количество «братьев» у каждого мужчины?

16.5. Укажите все пары $(x; y)$, для которых выполняется равенство:

$$\frac{x^4+1}{2} \cdot \frac{y^4+1}{2} = x^2y^2.$$

16.6. Докажите неравенство: $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$.

16.7. Докажите неравенство: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

16.8. Докажите неравенства:

а) $ab(a+b) \leq a^3+b^3$;

б) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leq 2(a^3+b^3+c^3)$.

16.9. Доказать неравенство: $a^8+b^8+c^8 \geq a^3b^3c^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Подсказка: воспользуйтесь несколько раз неравенством из задачи 16.6, учитывая, что $x^8 = (x^4)^2$