

Решить уравнение в целых числах означает найти все целые числа (или пары, тройки чисел и т. д. — смотря сколько переменных в уравнении), при подстановке которых в уравнение на место переменной (переменных) оно обращается в верное равенство, либо доказать, что таких нет.

**15.1.** Решите в целых числах уравнения:

**а)**  $3x = 7y$ ; **б)**  $9x - 12y = 0$ ; **в)**  $5x + 8y = 0$ .

**15.2.** Решите в целых числах уравнения:

**а)**  $(2x - y)(5x - 3y) = 7$ ; **б)**  $x^2 - y^2 = 5$ ; **в)**  $x^2 - y^2 = 15$ .

**15.3.** Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах: **а)**  $3x + 6y = 7$ ; **б)**  $2^x = 3^y$ ; **в)**  $x^2 - y^2 = 1$ .

**15.4.** Решите в целых числах уравнения:

**а)**  $x^2 + 2xy - 3y^2 = 20$ ; **б)**  $6x^2 - xy - 12y^2 = 14$ .

*Подсказка: разложите левую часть каждого уравнения на множители.*

**15.5.** Сколько решений в целых числах имеет уравнение:

**а)**  $x^2 - y^2 = 2^{100}$ ; **б)**  $x^2 - y^2 = p^{100}$  ( $p > 2$  — простое);

**в)**  $x^2 - 9y^2 = 1000000$ ?

**15.6.** Квадрат разрезан на 35 квадратов размером  $1 \times 1$  и один квадрат большего размера. Какого именно?

**15.7.** Найдите все простые числа  $p$  и  $q$ , для которых выполняется равенство  $p^2 - 2q^2 = 1$ .

**15.8.** Решите в натуральных числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

**15.9.** Решите в целых числах уравнения:

**а)**  $xy = x + y$ ; **б)**  $xy = x + y + 3$ ; **в)**  $3x + 5y = xy$ .

*Подсказка: сначала выразите  $x$  через  $y$ .*

**15.10.** Решите в целых числах уравнение  $x(x + 1) = 4y(y + 1)$ .

*Подсказка: раскройте скобки, умножьте на 4 и выделите полный квадрат в обеих частях уравнения.*

**15.11.** Докажите, что уравнение  $x^2 - 2y^2 = 0$  имеет единственное решение в целых числах.