

Пусть требуется доказать утверждение вида «Для каждого натурального числа n верно, что...». Это то же самое, что доказать бесконечную цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что...», «Для $n = 2$ верно, что...», «Для $n = 3$ верно, что...» и так далее. Чтобы сделать это *методом математической индукции*, достаточно:

- 1) доказать первое утверждение: «Для $n = 1$ верно, что...» (*база индукции*);
- 2) доказать, что при каждом натуральном значении k из утверждения «Для $n = k$ верно, что...» следует утверждение «Для $n = k + 1$ верно, что...» (*шаг индукции*).

12.1. На плоскости дано несколько прямых. Докажите, что части, на которые разделена плоскость, можно покрасить в два цвета так, чтобы никакие одноцветные части не имели больше одной общей вершины.

12.2. Докажите, что для всех натуральных n :

а) $n^3 + 5n \div 6$; б) $10^n + 18n - 1 \div 27$.

12.3. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое число правильных треугольников, начиная с 6.

12.4. На каждой планете сидит астроном, наблюдающий ближайшую планету. Все расстояния между планетами различны, а число планет нечётно. Докажите, что какую-то планету никто не наблюдает.

12.5. Докажите, что все числа в бесконечной последовательности 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, ... делятся на 53.

12.6. Для любых трёх точек A_1, A_2, A_3 выполнено *неравенство треугольника*: $A_1A_2 + A_2A_3 \geq A_1A_3$. Сформулируйте и докажите аналогичное неравенство для n точек ($n \geq 3$). Когда оно обращается в равенство?

12.7. В компании из $n \geq 4$ человек у каждого есть новость, известная ему одному. В разговоре двое обмениваются всеми известными им новостями. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все могут узнать все новости.

12.8. Докажите, что единицу можно представить в виде суммы 2023 попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

12.9. В городе два автобусных парка. Между любыми двумя остановками есть маршрут хотя бы одного парка. Докажите, что можно оставить один автобусный парк так, чтобы на его автобусах можно было доехать от любой остановки до любой (возможно, с пересадками).