ММФ-8. Занятие 11. Алгоритм Евклида (11.02.2023)

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* — это наибольшее натуральное число c со свойством $a \vdots c$, $b \vdots c$. Обозначается НОД(a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.
Целые числа a и b называются *взаимно простыми,* если НОД$(a, b) = 1$.

Во всех задачах этого занятия латинскими буквами обозначаются целые числа (и даже натуральные, если не оговаривается иное).

11.1. Пусть $a \geqslant b$. Докажите, что НОД$(a,\, b)$ = НОД$(a - b,\, b)$.

11.2 (шаг алгоритма Евклида)**.** Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a на b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$. Докажите, что

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r).$$

Алгоритм Евклида. *Для вычисления* НОД(a, b) *начнём с пары чисел* (a, b) *и будем применять шаги, описанные в предыдущей задаче. При каждом переходе от пары* (*делимое, делитель*) *к паре* (*делитель, остаток*) *оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару* $(d,\, 0)$, *где* d = НОД$(a,\, b)$.

11.3. Не раскладывая числа на простые множители, вычислите:
а) НОД(861, 637); **б)** НОД(2014, 7813); **в)** НОД(121, 759).

11.4. **а)** Сократите дробь $\dfrac{5840383}{34173679}$. **б)** Сократима ли дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$?

11.5. Найдите: **а)** НОД$(n,\, n+1)$; **б)** НОД$(2n,\, 2n+2)$; **в)** НОД$(3n,\, 6n+3)$; **г)** НОД$(2n+13,\, n+7)$.

11.6. На доске написаны числа a и b. Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если:
а) $a = 1001,\ b = 759$; **б)** $a = 7n + 3,\ b = 11n + 5$.

11.7. Возьмём прямоугольник $m \times n$ клеточек и будем раз за разом отрезать по клеточкам от него квадрат с максимально возможной стороной. В итоге получится квадрат. С какой стороной?

11.8. Найдите:
а) НОД$(10^7 - 1,\, 10^5 - 1)$; **б)** НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{m},\, \underbrace{11\ldots1}_{n})$; **в)** НОД$(a^m - 1,\, a^n - 1)$.

11.9. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.