

1. Система отрезков на прямой такова, что любые два отрезка имеют общую точку. Докажите, что тогда все отрезки из этой системы имеют общую точку.
2. На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего некоторую пару точек из M . Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.
3. Система прямоугольников на плоскости такова, что любые два имеют общую точку.
 - а) Следует ли из этого, что они все имеют общую точку?
 - б) А если их стороны параллельны осям координат?

Выпуклое множество — множество, для которого отрезок, соединяющий любые две его точки, лежит целиком внутри множества.

Теорема Хелли. Даны n выпуклых множеств на плоскости. Известно, что любые три из них имеют общую точку. Тогда все n выпуклых множеств имеют общую точку.

4. а) Справедлива ли теорема Хелли для невыпуклых множеств на плоскости и на прямой?
б) Справедлива ли теорема Хелли для бесконечной системы выпуклых многоугольников?
5. Для произвольного выпуклого семиугольника все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.
6. Дана система из 100 линейных неравенств от двух переменных. Если любые три из них имеют общее решение, то и вся система имеет решение. *Указание: вспомните, чем на координатной плоскости является множество решений линейного неравенства.*
7. На плоскости дано n точек, причем любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что тогда все точки можно накрыть кругом радиуса 1.
8. На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трёх отрезков найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все эти отрезки.
9. Прямая раскрашена в два цвета. Доказать, что найдется отрезок, концы и середина которого — точки одного цвета.
10. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдётся равносторонний треугольник, вершины которого одинакового цвета.
Указание: воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.