1. Докажите, что $x^2 + y^2 \geq 2xy$ для любых x и y.
2. Докажите, что $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ для любых неотрицательных x и y.
3. Докажите, что $z + \frac{1}{z} \geq 2$ для любого положительного z.
4. Докажите, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг другу.
   Например, $5 + 5 = 4 + 6 = 3 + 7$ *при этом* $5 \times 5 > 4 \times 6 > 3 \times 7$.
5. а) Докажите неравенство: $a/b + b/a \geq 2$ для любых положительных a и b.
   б) У продавца, который продаёт сахар, есть рычажные весы, которые имеют плечи не совсем одинаковой длины, и гиря весом 1 кг. Покупатель хотел купить 2 кг сахара. Так как весы показывают не совсем точно, продавец первый килограмм взвесил на одной чаше весов, а второй — на другой. Кто выиграл, покупатель или продавец?
6. а) Докажите, что при $s > 0$ и $v > w > 0$ выполнено неравенство:
   $$\frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} \geq 2\frac{s}{\sqrt{(v^2 - w^2)}}$$
   б) Корабль плывёт из А в В по течению реки, а затем возвращается против течения (скорость течения и кораблей постоянны). Потратит ли он на весь путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?
7. а) Докажите, что для всех положительных a и b выполнено неравенство: $2a + b \geq 2\sqrt{2ab}$. При каких a и b неравенство превращается в равенство?
   б) Прямоугольный участок около реки с трёх сторон огорожен забором (четвёртая сторона — берег, поэтому там забор не нужен). Длина забора 100 метров. Какую максимальную площадь может иметь этот участок?
8. (*) Докажите неравенство для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ...a_n$:

$$\min\{a_1; ...a_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}} \leq \max\{a_1; ...a_n\}$$

1. Докажите, что $x^2 + y^2 \geq 2xy$ для любых x и y.

2. Докажите, что $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ для любых неотрицательных x и y.

3. Докажите, что $z + \frac{1}{z} \geq 2$ для любого положительного z.

4. Докажите, что при постоянной сумме двух чисел их произведение тем больше, чем ближе числа друг другу.
Например, $5 + 5 = 4 + 6 = 3 + 7$ *при этом* $5 \times 5 > 4 \times 6 > 3 \times 7$.

5. а) Докажите неравенство: $a/b + b/a \geq 2$ для любых положительных a и b.
б) У продавца, который продаёт сахар, есть рычажные весы, которые имеют плечи не совсем одинаковой длины, и гиря весом 1 кг. Покупатель хотел купить 2 кг сахара. Так как весы показывают не совсем точно, продавец первый килограмм взвесил на одной чаше весов, а второй — на другой. Кто выиграл, покупатель или продавец?

6. а) Докажите, что при $s > 0$ и $v > w > 0$ выполнено неравенство:
$$\frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} \geq 2\frac{s}{\sqrt{(v^2 - w^2)}}$$
б) Корабль плывёт из A в B по течению реки, а затем возвращается против течения (скорость течения и кораблей постоянны). Потратит ли он на весь путь больше или меньше времени, чем на равный путь по озеру?

7. а) Докажите, что для всех положительных a и b выполнено неравенство: $2a + b \geq 2\sqrt{2ab}$. При каких a и b неравенство превращается в равенство?
б) Прямоугольный участок около реки с трёх сторон огорожен забором (четвёртая сторона — берег, поэтому там забор не нужен). Длина забора 100 метров. Какую максимальную площадь может иметь этот участок?

8. (*) Докажите неравенство для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ...a_n$:
$$\min\{a_1; ...a_n\} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}} \leq \max\{a_1; ...a_n\}$$