9. Игры — выигрышные и проигрышные позиции

Теория.

Игры. *В каждой из предложенных задач двое игроков играют в некоторую игру, делая ходы по очереди по определённым правилам. В каждой из задач спрашивается, кто из игроков имеет стратегию, позволяющую ему победить при любых действиях соперника.*

Выигрышные и проигрышные позиции. *Позиция называется выигрышной, если из неё можно одним ходом победить, или если из неё можно попасть в проигрышную позицию. Позиция называется проигрышной, если из неё можно попадать только в выигрышные позиции.*

Задачи.

9.1. Игра начинается с числа 4. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое, меньшее его, натуральное число. Выигрывает тот, кто получит 1000.

9.2. *Игра Баше.* Имеется 2022 палочки. За ход разрешается взять одну, две или три. Побеждает взявший последнюю палочку.

9.3. В левом нижнем углу доски стоит шахматный король. За один ход его можно сдвинуть либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку по диагонали вправо вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

9.4. Имеется две кучки конфет: в одной – 20, а в другой – 21 конфета. За ход нужно съесть одну из кучек, а другую разделить на две непустых кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

9.5. В стране Дураков однажды на волшебном дереве выросло 300 золотых монет. Кот Базилио и лиса Алиса договорились по очереди каждую ночь ходить к этому дереву и забирать не более половины имеющихся на нем монет. Если кто-то из них не может больше сорвать ни одной монеты, то отдает другому все, что успел взять. Первой пошла Алиса. Кто останется в дураках?

9.6. Катя и Люба играют в следующую игру. На доске написано число 1. За один ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9, записать результат, а старое число стереть. Выигрывает тот, кто получит число, большее 1000. Кто сможет обеспечить себе победу, если начинает игру Катя?

9.7. Калькулятор «ЧМ» может вычитать из имеющегося числа только степени двойки (1, 2, 4, ...). Джанни набирает число 2022. Килиан и Лионель по очереди нажимают на кнопки калькулятора. Выигрывает тот, кто первым получит 0. (Начинает игру Килиан.)

9.8. Имеются две кучи, в которых суммарно 2023×2^{100} камней. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из игроков своим ходом может взять любую кучу, в которой чётное число камней, и половину камней из неё переложить в другую кучу. Тот, кто не может сделать ход — проигрывает. Верно ли, что для любой начальной позиции кто-то из игроков заведомо может выиграть независимо от игры соперника?