8. Инвариант

Задачи.

8.1. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 20$. За ход разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них число $a + b - 1$. Какое число окажется на доске после 19 операций?

8.2. В вершинах куба написаны числа: семь нулей и одна единица. За ход можно прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными?

8.3. В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать произвольное целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a, а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a. Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?

8.4. На доске написали число 1. После этого к записнному числу каждую минуту прибавляют его сумму цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456789?

8.5. В вершинах правильного 12–угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается менять знак в любых трёх подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину?

8.6. На доске написаны числа от 1 до n. Изначально все числа покрашены в белый цвет. За одну операцию можно выбрать любые четыре из них, которые образуют арифметическую прогрессию, и одновременно перекрасить их (белые числа в черный цвет, а черные числа — в белый). При каких n можно несколькими такими операциями добиться того, что все числа на доске станут черными? (Числа $a < b < c < d$ образуют арифметическую прогрессию, если $b - a = c - b = d - c$.)

8.7. Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2. Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.