Вступительная олимпиада 2025/2026 учебного года

7 класс, письменный тур 21.09.2025. Задачи и решения

1. **Задача.** Сколько всего четырёхзначных чисел, у которых сумма первых трёх цифр равна 25, а сумма последних трёх цифр равна 16? Число не должно начинаться с нуля.

   Решение. Сумма первых трёх цифр больше суммы последних трёх на 9, значит, первая цифра больше последней на 9. Это возможно, только если первая цифра 9, а последняя 0. Тогда сумма оставшихся двух цифр равна 16=7+9=8+8=9+7. Значит, нам подходят три числа: 9790, 9880, 9970.

   Ответ: 3.

2. **Задача.** На прямой отмечены точки A, B, C, D в указанном порядке. Известно, что $AC = 12$ см, $BD = 14$ см, $AD = 16$ см. Найдите длину отрезка BC в сантиметрах.

   Решение. $AB = AD - BD = 2$ см, $CD = AD - AC = 4$ см, $BC = AD - AB - CD = 10$ см.

   Ответ: 10.

3. **Задача.** В числе 2938710564 зачеркните четыре цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили как можно большее число. В ответ запишите получившееся число.

   Решение. При вычёркивании любых четырёх цифр из данного числа получится 6-значное число (причём начинающееся не с нуля), то есть количество разрядов не зависит от того, какие цифры будут вычеркнуты. В разряде сотен тысяч нужно оставить 9 (иначе получится число меньше 900000), поэтому цифру 2 вычёркиваем, а цифру 9 — нет. В разряде десятков тысяч нужно оставить 8 (иначе получится число меньше 980000), значит, цифру 3 вычёркиваем, а цифру 8 — нет. И так далее. В итоге вычёркиваем цифры 2, 3, 1 и 0, остаётся число 987564.

   Ответ: 987564.

4. **Задача.** Тоня написала на доске число, потом пришёл Петя и стёр первую и последнюю цифру числа. На доске осталась запись 012344567899876543211 00. Восстановите стёртые цифры, если известно, что исходное число делилось на 144. В ответ запишите стёртые цифры (первую, затем последнюю) без пробела.

   Решение. Число делится на 144 тогда и только тогда, когда оно делится на 9 и на 16. Делимость на 16 определяется последними четырьмя цифрами числа: чтобы образованное ими число делилось на 16, последняя (стёртая) цифра исходного числа должна быть 8 ($1008 = 16 \cdot 63$). Тогда сумма всех цифр исходного числа, кроме первой (стёртой), будет равна $0+1+2+3+4+4+5+6+7+8+9+9+8+7+6+5+4+3+2+1+1+0+0+8 = 103$, и чтобы число делилось на 9, его сумму цифр нужно дополнить до $108 = 9 \cdot 12$ цифрой 5.

   Ответ: 58.

5. **Задача.** Коля выписал все натуральные числа от 200 до 600 включительно. Ира подчеркнула среди них все числа, делящиеся на 7, Петя — все чётные числа, а Оля — все числа, делящиеся на 4. Сколько чисел оказались подчёркнуты ровно два раза?

   Решение. Ровно дважды будут подчёркнуты числа, делящиеся на 2 и на 4, но не делящиеся на 7 (то есть делящиеся на 4 и не делящиеся на 28), а также числа, делящиеся на 2 и на 7, но не делящиеся на 4 (то есть делящиеся на 14, но не делящиеся на 28). $8 \cdot 28 = 224,\ 21 \cdot 28 = 588, 15 \cdot 14 = 210,\ 42 \cdot 14 = 588, 50 \cdot 4 = 200,\ 150 \cdot 4 = 600$. Значит, среди выписанных чисел делящихся на 4 будет $150 - 50 + 1 = 101$, делящихся на 14 будет $42 - 15 + 1 = 28$, делящихся на 28 будет $21 - 8 + 1 = 14$. Ровно дважды будут подчёркнуты $(101 - 14) + (28 - 14) = 101$.

   Ответ: 101.

6. **Задача.** Есть 6 красных шаров, 3 жёлтых и 3 синих. Сколькими способами можно выложить эти шары в ряд слева направо так, чтобы никакие два шара одного цвета не лежали рядом? Шары одного цвета между собой неразличимы.

   Решение. Заметим, что жёлтых и синих шаров в сумме столько же, сколько красных. Расставим 6 красных шаров, получим 5 мест между ними (на каждое из которых ставим хотя бы один шар) и 2 по краям. Рассмотрим случай, когда слева стоит не красный шар. Тогда остальные не красные шары стоят по одному в промежутках между красными. Чтобы посчитать количество таких расстановок, достаточно посчитать количество способов расставить 3 жёлтых и 3 синих шара произвольным образом. Оно равно $6 \cdot 5 \cdot 4 : 3! = 20$. В случае, когда справа стоит не красный шар, также получаем 20 способов. Если по краям стоят красные шары, то между какими-то из двух красных шаров стоят 1 жёлтый и 1 синий шар, место для такой пары можно выбрать 5 способами, а порядок жёлтого и синего шара в паре можно выбрать 2 способами. Остальные 2 жёлтых и 2 синих шара расставляются на оставшиеся 4 места 6 способами (расставив 2 жёлтых шара, расставляем на 3 образовавшиеся места 2 синих шара (возможно по несколько штук), это можно сделать $3 + 3 = 6$ способами). Получаем $5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$ способов. Всего $20 + 20 + 60 = 100$ способов.

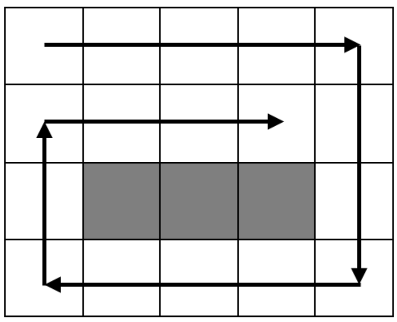
   Ответ: 100.

7. **Задача.** В вазе лежат N вишен. Два игрока по очереди делают ходы. За один ход можно брать одну, две, или три вишни. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Сколько существует таких значений N от 25 до 35 включительно, при которых обеспечить себе гарантированную победу (независимо от ходов соперника) может первый игрок?

   Решение. Если N кратно 4, то для второго игрока существует выигрышная стратегия — дополнение хода первого игрока до 4 вишен. Если N не кратно 4, первый игрок может первым ходом взять количество вишен, равное остатку от деления N на 4, и далее дополнять шаги второго игрока до 4 вишен — такими действиями он обеспечит себе победу. Значит, подходят N от 25 до 35, которые не делятся на 4. От 25 до 35 всего $35-25+1 = 11$ чисел, из них на 4 делятся 2 числа ($7 \cdot 4 = 28,\ 8 \cdot 4 = 32$), всего $11 - 2 = 9$.

   Ответ: 9.

8. **Задача.** Вирус съедает клетки прямоугольника 604×4004 по спирали по часовой стрелке, начиная с левого верхнего угла (на рисунке показан пример, как это происходит для прямоугольника 4×5). В какой-то момент вирусу останется съесть полоску $1 \times k$ (в примере на рисунке она закрашена серым цветом, $k = 3$). Найдите наибольшее такое k.



   Решение. После каждого круга (слева направо, сверху вниз, справа налево, снизу вверх) длина и ширина прямоугольника уменьшаются на 2. Значит, через $602 : 2 = 301$ цикл вирусу остаётся съесть прямоугольник $2 \times (4004 - 602)$, т.е. 2×3402. После того как вирус съест клетки слева направо, останется прямоугольник 1×3402. Таким образом, наибольшее $k = 3402$.

   Ответ: 3402.