6. Деревья

Последовательность различных ребер графа называется ***путем****, если конец каждого из этих ребер является началом следующего. Путь, конец которого совпадает с началом, называется* ***циклом****. Граф называется* ***связным****, если между любыми двумя его вершинами существует некоторый путь. Ребро связного графа называется* ***мостом****, если при удалении этого ребра граф теряет связность.*

6.1. Докажите, что в связном графе каждое ребро либо является мостом, либо входит в некоторый цикл.

Связный граф без циклов называется ***деревом****.*

6.2. Докажите, что связный граф является деревом в том и только в том случае, когда каждое его ребро есть мост.

6.3. Докажите, что граф является деревом тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами есть ровно один путь.

Пусть вершины графа раскрашены в несколько цветов. Говорят, что раскраска вершин ***правильная****, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.*

6.4. Докажите, что вершины дерева можно раскрасить правильным образом в два цвета.

Вершина степени один называется ***висячей****.*

6.5. Докажите, что в любом нетривиальном дереве есть висячая вершина.

6.6. Докажите, что в любом нетривиальном дереве есть по меньшей мере две висячие вершины.

6.7. Докажите, что если в дереве есть вершина степени s, то в этом дереве по меньшей мере s висячих вершин.

6.8. Докажите, что в любом дереве вершин ровно на одну больше, чем ребер.

6.9. Докажите, что связный граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда в нем $n-1$ ребро.

6.10. Тимофей по очереди перерезает веревочки воллейбольной сетки $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек он может перерезать, прежде чем сетка распадется на две части?

Вершина связного графа называется ***точкой сочленения****, если при удалении из графа ее и всех выходящих из нее ребер граф теряет связность.*

6.11. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, не являющаяся точкой сочленения.

6.12. У сторожа на складе лежит n разноцветных мешков, причем каждый из мешков либо лежит непосредственно на полу склада, либо находится в каком-либо другом мешке. Сторож умеет проделывать с мешками следующую операцию: он может выбрать один из непосредственно лежащих на полу склада мешков, вынуть и положить на пол его содержимое, а все остальные лежавшие до этого на полу склада мешки убрать внутрь выбранного. Сколько расположений мешков сторож может таким образом получить. (Два расположения считаются одинаковыми, если содержимое каждого из мешков в обоих из них совпадает.)