5. Отрицательные остатки

Теория.

Сравнения по модулю. *Говорят, что два числа a и b сравнимы по модулю d, если их разность делится на d.*

$$a \equiv b \pmod d \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \,\vdots\, d.$$

Эквивалентное определение. *Два числа сравнимы по модулю d тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки при делении на d.*

Основное свойство. *Если в выражении, использующем только знаки сложения, умножения и вычитания, заменить одно из входящих чисел на сравнимое с ним по модлую d, то значение полученного выражения будет сравнимо со значением исходного выражения по модулю d.*

$$a \equiv b \pmod d \qquad \Longrightarrow \qquad P(a) \equiv P(b) \pmod d.$$

Важная Идея. *По определению остаток числа n при делении на d не может быть отрицательным. Тем не менее, если $n \equiv d - r \pmod d$, то часто бывает удобно вместо этого пользоваться тем, что $n \equiv -r \pmod d$.*

Задачи.

4.1. Найдите остаток от деления

(а) 2021^{100} на 2022;

(б) 2020^{10} на 2022;

(в) 8^{2021} на 11.

4.2. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

4.3. Докажите, что $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при нечётном n.

4.4. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

4.5. Назовём натуральное число n *удобным*, если n^2+1 делится на 10001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 10000$ чётное число удобных.

4.6. Пусть n — такое натуральное число, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей числа n тоже делится на 24.