# 4. Индукция - доказательство тождеств

*Задачи.*

Докажите, что для любого натурального $n$ имеют место равенства:

**4.1.**

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

**4.2.**

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

**4.3.**

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

**4.4.**

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}.$$

**4.5.**

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

**4.6.**

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

**4.7.**

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}.$$

**4.8.**

$$1\cdot2+2\cdot3+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

**4.9.**

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**4.10.**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

**4.11.**

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

**4.12.** Обозначим через $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$ последовательность чисел Фибоначчи. (По определению $F_1=F_2=1$, а $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$ для любого $k\geq3$.) Докажите, что

$$F_{m+n}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n$$

для любых $m,n\geq2$.