ММФ-7. Занятие 23. Остатки сладки (23.04.2022)

Последнее занятие Малого мехмата в этом полугодии состоится в субботу 30 апреля. О возобновлении занятий в сентябре читайте на сайте Малого мехмата: mmmf.msu.ru

Во всех задачах этого занятия все упомянутые числа предполагаются целыми, если не оговорено иное. Деление выполняется либо нацело, либо с остатком.

23.1. Верны ли следующие утверждения и почему:
а) существует число a, кратное 3, дающее при делении на 12 остаток 2;
б) если a делится на 8 с остатком 3, то a делится на 4 с остатком 3;
в) если a делится на 4 с остатком 3, то a делится на 8 с остатком 3;
г) если a делится на 15 с остатком 7, то a делится на 5 с остатком 3;
д) если a делится на 15 с остатком 3, то a делится на 9 без остатка?

23.2. Составьте таблицу всех возможных остатков квадратов и кубов целых чисел при делении на **а)** 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 6; **д)** 7; **е)** 8; **ж)** 9.

23.3. Докажите, что:
а) $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n;
б) $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n;
в) $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n;
г) $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n.

23.4. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 может быть равен либо единице, либо простому числу.

23.5. Известно, что a, b, c — натуральные числа, причём число $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

23.6. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

23.7. Докажите, что если $a^2 + b^2$ делится на 7, то a и b делятся на 7.

23.8. Докажите, что среди любых пяти целых чисел найдутся три числа, сумма которых делится на 3.

23.9. Докажите, что число $a^3 + b^3 + 4$ не является точным кубом (то есть кубом целого числа) ни при каких целых a и b.