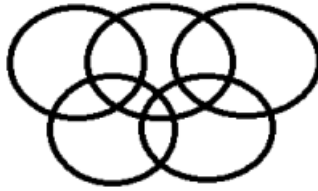


19. Эйлеровы графы

Задачи

19.1. Нарисуйте Олимпийские Кольца, не отрывая карандаш от бумаги:



19.2. В стране имеется несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из города Шарамбарам выходит ровно n дорог. Известный путешественник выехал из одного из городов и объехал всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Закончился ли его путь в Шарамбаре, если

- а) он начал путь в городе Шарамбарам и n чётно;
- б) он начал путь в городе Шарамбарам и n нечётно;
- в) он начал путь в другом городе и n чётно;
- г) он начал путь в другом городе и n нечётно?

19.3. *Задача Эйлера о Кенигсбергских мостах.* Через город Кенигсберг протекает река, в русле которой расположены два острова. С большего острова ведет по два моста на каждый из берегов и один мост на меньший остров. Кроме этого моста с меньшего острова ведет по одному мосту на каждый из берегов. Некто хочет совершить прогулку по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Удастся ли ему это?

Определение. *Путь, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз называется эйлеровым.*

19.4. Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

19.5. Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть хотя бы один цикл.

19.6. Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

19.7. Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

19.8. Докажите, что если в связном графе ровно две вершины с нечетными степенями, то в этом графе есть эйлеров путь.

19.9. Город представляет из себя квадрат 5×5 , в котором каждая сторона квартала–квадратика — участок улицы длины 1 километр. Какой наименьший путь придётся проделать катку, чтобы заасфальтировать все улицы?