

## 18. Геометрические неравенства

### Теория

**Неравенство резинки.** Пусть точка  $M$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Тогда  $AM + MB < AC + CB$ .

**Неравенство медианы.** Медиана треугольника не превосходит полусуммы сторон, проведенных из той же вершины.

**Неравенство чевианы.** На основании равнобедренного треугольника отметили произвольную точку. Докажите, что расстояние от нее до противоположной вершины треугольника меньше боковой стороны.

### Задачи

**18.1.** Внутри треугольника взята произвольная точка. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин меньше периметра треугольника.

**18.2.** Диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Внутри треугольника  $AOB$  отметили точку  $P$ . Внутри треугольника  $BOC$  — точку  $Q$ . Внутри треугольника  $COD$  — точку  $R$ . Внутри треугольника  $DOA$  — точку  $S$ . Докажите, что периметр восьмиугольника  $APBQCRDS$  меньше удвоенной суммы диагоналей четырехугольника  $ABCD$ .

**18.3.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отметили точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AP = PQ = QC$ . Докажите, что  $AB + BC > PB + BQ$ .

**18.4.** Внутри выпуклого четырехугольника отметили произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника не меньше суммы диагоналей.

**18.5.** Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, меньше полусуммы его диагоналей.

**18.6.** Внутри треугольника  $ABC$  взяли произвольные точки  $O$  и  $M$ . Докажите, что  $AM + BM + CM + OM > AO + BO + CO$ .

**18.7.** Внутри правильного треугольника  $ABC$  отметили точки  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $PQ < AB$ .