

16. Соответствия

Теория.

Идея. Для того, чтобы доказать, что в двух группах поровну предметов, не обязательно напрямую считать, сколько предметов в каждой из групп. Достаточно разбить все элементы на пары, в которой один предмет принадлежит первой группе, а другой — второй группе.

Задачи.

16.1. Кого на свете больше: женатых мужчин или замужних женщин?

16.2. Назовём трёхзначные числа, у которых все цифры не кратны 3, строгими. Каких строгих чисел больше: тех, где цифры идут строго по возрастанию, или тех, где цифры идут строго по убыванию?

16.3. Каких делителей у числа 202220222022 больше: четных или нечетных?

16.4. На окружности отмечено несколько точек синих точек и одна красная. Каких многоугольников больше: тех, у которых все вершины синие или тех, у которых есть красная вершина?

16.5. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр. Билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Каких билетов больше:

(а) с суммой цифр 21 или с суммой цифр 33?

(б) счастливых или образующих число, делящееся на 11 (ноль на первом месте не запрещён)?

16.6. Вместо того чтобы решать задачи, Лёша считает количество путей из нижнего левого узла квадрата 8×8 в верхний правый, идущих по линиям сетки вправо или вверх и не поднимающихся выше главной диагонали. Рядом с ним сидит Матвей, который от скуки расставляет всеми возможными способами в прямоугольнике 2×8 числа от 1 до 16 так, чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце шли по возрастанию. Докажите, что у Лёши и Матвея получится один и тот же результат.

16.7. Алиса и Китти играют в следующую игру. Сперва Алиса ставит в одну из клеток шахматной доски короля. Затем по очереди они (начиная с Китти) делают этим королём ходы. Проигрывает тот, после чьего хода король попадёт на клетку, в которой уже был. Кто выиграет при правильной игре?